Lineární rovnice s konstantními koeficienty 1

$$y'' - 2y' + y = 2xe^x + e^x \sin 2x \tag{1}$$

Homogenní rovnice. Charakteristický polynom

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

má kořen $\lambda = 1$ násobnosti 2 $\Rightarrow$ FS $= (e^x, xe^x)$. Řešení jsou právě $y_h(x) = ae^x + bxe^x$, $x \in \mathbf{R}$ pro $a, b \in \mathbf{R}$.

Výraz na pravé straně (1) je součtem výrazů ve speciálním tvaru.

Rovnice $y'' - 2y' + y = 2xe^x$. PS je speciálního tvaru $e^{\mu x}(P(x)\cos(\nu x) + Q(x)\sin(\nu x))$ pro $\mu = 1$, $P(x) = 2x$, $\nu = 0$. Číslo $\mu + \nu i = 1$ je kořenem charakteristického polynomu násobnosti 2. Věta XVI.5: Partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_1(x) = x^2 e^x(\alpha x + \beta), \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= e^x(\alpha x^3 + \beta x^2) \\
y_1'(x) &= e^x(\alpha x^3 + (3\alpha + \beta)x^2 + 2\beta x) \\
y_1''(x) &= e^x(\alpha x^3 + (3\alpha + \beta + 3\alpha)x^2 + (2\beta + 6\alpha + 2\beta)x + 2\beta) \\
&= e^x(\alpha x^3 + (6\alpha + \beta)x^2 + (6\alpha + 4\beta)x + 2\beta)
\end{aligned}$$

Dosazením do rovnice

$$e^x[(\alpha - 2\alpha + \alpha)x^3 + (6\alpha + \beta - 6\alpha - 2\beta + \beta)x^2 + (6\alpha + 4\beta - 4\beta)x + 2\beta] = 2xe^x$$

Koeficienty u x^3 a x^2 jsou nulové. Chceme $6\alpha x + 2\beta = 2x \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}, \beta = 0$. Řešení je $y_1(x) = \frac{1}{3}x^3 e^x$.

Rovnice $y'' - 2y' + y = e^x \sin 2x$. PS ve speciálním tvaru $e^{\mu x}(P(x)\cos(\nu x) + Q(x)\sin(\nu x))$ pro $\mu = 1$, $\nu = 2$, $P(x) = 0$ a $Q(x) = 1$. Číslo $\mu + i\nu = 1 + 2i$ není kořenem charakteristického polynomu. Partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_2(x) = e^x(\alpha \cos 2x + \beta \sin 2x), \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

$$\begin{aligned}
y_2'(x) &= e^x[(\alpha + 2\beta)\cos 2x + (\beta - 2\alpha)\sin 2x] \\
y_2''(x) &= e^x[(\alpha + 2\beta + 2\beta - 4\alpha)\cos 2x + (\beta - 2\alpha - 2\alpha - 4\beta)\sin 2x] \\
&= e^x[(4\beta - 3\alpha)\cos 2x + (-4\alpha - 3\beta)\sin 2x]
\end{aligned}$$

Dosazením do rovnice

$$\begin{aligned}
e^x[(4\beta - 3\alpha - 2\alpha - 4\beta + \alpha)\cos 2x + (-4\alpha - 3\beta - 2\beta + 4\alpha + \beta)\sin 2x] &= e^x \sin 2x \\
-4\alpha \cos 2x - 4\beta \sin 2x &= \sin 2x
\end{aligned}$$

Dostáváme $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{1}{4}$. Řešení je $y_2(x) = -\frac{1}{4}e^x \sin 2x$.

Závěr. Všechna řešení rovnice (1) jsou právě

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 e^x - \frac{1}{4}e^x \sin 2x + ae^x + bxe^x, x \in \mathbf{R}, a, b \in \mathbf{R}.$$

Lineární rovnice s konstantními koeficienty

1. $y'' + 4y' + 4y = 0$

2. $y'' - 3y' + 2y = 0$

3. $y'' - 6y' + 13y = 0$

4. $y^{(4)} + 6y'' + 9y = 0$

5. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$

6. $y'' - 2y' + 5y = \cos x$

7. $y''' + y'' = x$

8. $y''' - y'' - 2y' = e^{2x} + x^3 + 3x^2 + 1$

9. $y'' + 3y' + 2y = \sin x + \sin 2x$

10. $4y''' + y' = 3e^x + 2\sin\frac{x}{2}$

- -

Výsledky. **1.** $y = ce^{-2x} + dxe^{-2x}$, $x \in \mathbf{R}$ **2.** $y = ce^x + de^{2x}$, $x \in \mathbf{R}$ **3.** $y = e^{3x}(c\cos 2x + d\sin 2x)$, $x \in \mathbf{R}$ **4.** $y = a\cos\sqrt{3}x + b\sin\sqrt{3}x + cx\cos\sqrt{3}x + dx\sin\sqrt{3}x$, $x \in \mathbf{R}$ **5.** $y = \frac{1}{5}e^{4x} + ce^{-x} + de^{3x}$, $x \in \mathbf{R}$ **6.** $y = \frac{1}{5}\cos x - \frac{1}{10}\sin x + e^x(c\cos 2x + d\sin 2x)$, $x \in \mathbf{R}$ **7.** $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + a + bx + ce^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$ **8.** $y = \frac{1}{6}xe^{2x} - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{7}{8} + a + be^{-x} + ce^{2x}$, $x \in \mathbf{R}$ **9.** $y = -\frac{1}{20}\sin 2x - \frac{3}{20}\cos 2x - \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x + ce^{-x} + de^{-2x}$, $x \in \mathbf{R}$ **10.** $y = \frac{3}{5}e^x - x\sin\frac{x}{2} + a + b\cos\frac{x}{2} + c\sin\frac{x}{2}$, $x \in \mathbf{R}$