Lineární rovnice prvního řádu

Příklad 1. *Nalezněte řešení procházející bodem* $[0,1]$ *rovnice*

$$(1-x^2)y' + xy = 1.$$

Řešíme na intervalu $(a,b) = (-1,1)$.

$$y' + \frac{x}{1-x^2} \cdot y = \frac{1}{1-x^2}$$

To je lineární rovnice prvního řádu. Použijeme metodu integračního faktoru. Primitivní funkce $p(x) = \frac{x}{1-x^2}$ je $P(x) = -\frac{1}{2}\log(1-x^2)$. Vynásobíme rovnici $e^{P(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \tag{1}$$

Primitivní funkci k pravé straně nalezneme pomocí Eulerovy substituce

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \qquad x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Vyjádříme

$$\sqrt{1-x^2} = t(1+x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad 1-x^2 = \frac{4t^2}{(1+t^2)^2},$$

$$\int \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1+t^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - t\right) + c = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + c.$$

Z (1) dostáváme

$$\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + c$$
$$y = x + c\sqrt{1-x^2}$$

Chceme, aby řešení splňovalo $y(0) = 1$, proto volíme $c = 1$.

Závěr. Řešení procházející bodem $[0,1]$ je $y(x) = x + \sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1,1)$.

Poznámka. Nalezené řešení je maximální, protože pro derivaci $y'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ platí

$$\lim_{x\to 1-} y'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to -1+} y'(x) = +\infty.$$

Neexistuje prodloužení, které by mělo vlastní derivaci v bodě 1 nebo -1 (podle věty o limitě derivací).

Řešte rovnice.

1. $y' = \frac{y}{x} - 1$
2. $y'x = y + x^2$
3. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$
4. $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$
5. $xy' + y = \log x + 1$
6. $(a^2 + x^2)y' + xy = 1$ $(a \in \mathbf{R})$
7. $(2x + 1)y' + y = x$
8. $y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x$
9. $y' + y \cos x = \sin 2x$
10. $y' + \frac{x+1}{x} y = 3xe^{-x}$

Výsledky. **1.** $y = -x \log|x| + cx$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, +\infty)$, $c \in \mathbf{R}$ **2.** $y = x^2 + cx$, $x \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$ **3.** $y = -\frac{1}{2x^2}e^{-x^2} + \frac{c}{2x^2}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, +\infty)$, $c \in \mathbf{R}$ **4.** $y = -\frac{\cos 2x}{2\cos x} + \frac{c}{\cos x}$, $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$, $c \in \mathbf{R}$. Pro $c = -1/2$ lze slepit, tím dostaneme řešení $y(x) = -\cos x$, $x \in \mathbf{R}$. **5.** $y = \log x + \frac{c}{x}$, $x \in (0, +\infty)$, $c \in \mathbf{R}$ **6.** Pro $a = 0$: $y = \frac{\log|x|}{x} + \frac{c}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, +\infty)$, $c \in \mathbf{R}$; pro $a \neq 0$: *Hint:* $1/\sqrt{x^2 + a^2}$ *integrujte pomocí Eulerovy substituce, např.* $\sqrt{x^2 + a^2} = -x + t$. $y = \frac{\log(x + \sqrt{x^2+a^2})}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $x \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$. **7.** $y = \frac{1}{3}(x - 1) + \frac{c}{\sqrt{|2x+1|}}$, $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ nebo $x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$, $c \in \mathbf{R}$. Pro $c = 0$ lze slepit, dostaneme řešení $y(x) = \frac{1}{3}(x - 1)$, $x \in \mathbf{R}$. **8.** $y = 1 + \frac{1}{2\cos x} \log \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \frac{c}{\cos x}$, $x \in (k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbf{Z}$, $c \in \mathbf{R}$. **9.** $y = 2(\sin x - 1) + ce^{-\sin x}$, $x \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$ **10.** $y = x^2e^{-x} + \frac{c}{x}e^{-x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, +\infty)$, $c \in \mathbf{R}$