Autonomní rovnice

Příklad 1. *Vyšetřete průběh řešení rovnice*

$$y' = \frac{1}{y}(y+1)(y+2). \tag{1}$$

Řešení: Funkce $g(y) = \frac{1}{y}(y+1)(y+2)$ je definovaná a nenulová na intervalech $(-\infty,-2)$, $(-2,-1)$, $(-1,0)$ a $(0,+\infty)$. Nabývá nuly v bodech -2 a -1, z čehož dostáváme dvě stacionární řešení $y_1^0(x) = -2$ na $\mathbf{R}$ a $y_2^0(x) = -1$ na $\mathbf{R}$.

- g kladná na intervalech $(-2,-1)$ a $(0,+\infty)$ $\Rightarrow$ řešení rostoucí pro $y \in (-2,-1)$ a $y \in (0,+\infty)$
- g záporná na intervalech $(-\infty,-2)$ a $(-1,0)$ $\Rightarrow$ řešení klesající pro $y \in (-\infty,-2)$ a $y \in (-1,0)$

Konvexita/konkavita: Spočítáme derivaci funkce g (zde chápeme y jako proměnnou).

$$g'(y) = -\frac{1}{y^2}(y+1)(y+2) + \frac{1}{y}(y+2) + \frac{1}{y}(y+1) = \frac{y^2-2}{y^2}$$

Z rovnice (1) dostaneme druhou derivaci y (kde y chápeme jako funkci).

$$y'' = g'(y)y' = \frac{y^2-2}{y^2}g(y)$$

- $y'' > 0$ na intervalech $(-2,-\sqrt{2})$, $(-1,0)$ a $(\sqrt{2},+\infty)$ $\Rightarrow$ řešení **ostře** konvexní pro $y \in (-2,-\sqrt{2})$, $y \in (-1,0)$ a $y \in (\sqrt{2},+\infty)$
- $y'' < 0$ na intervalech $(-\infty,-2)$, $(-\sqrt{2},-1)$ a $(0,\sqrt{2})$ $\Rightarrow$ řešení **ostře** konkávní pro $y \in (-\infty,-2)$, $y \in (-\sqrt{2},-1)$ a $y \in (0,\sqrt{2})$

Definiční obor řešení určíme pomocí větičky XIV.2. K tomu je potřeba zkoumat konvergenci jistých integrálů, k čemuž nám poslouží věty XIV.3 a XIV.4.

- $\int_0^{+\infty} \frac{y}{(y+1)(y+2)}\,\mathrm{d}y$: Rozdělíme na dva integrály $\int_0^c \frac{y}{(y+1)(y+2)}\,\mathrm{d}y$ a $\int_c^{+\infty} \frac{y}{(y+1)(y+2)}\,\mathrm{d}y$, například pro $c = 1$. Máme

  $$\lim_{y\to 0+} g(y) = \lim_{y\to 0+} \frac{(y+1)(y+2)}{y} = +\infty, \qquad \lim_{y\to +\infty -} \frac{g(y)}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{(y+1)(y+2)}{y^2} = 1,$$

  první integrál tedy konverguje podle věty 3 (1) a druhý diverguje podle věty 4 (2). Řešení s hodnotami v intervalu $(0,+\infty)$ je definováno na intervalu typu $(T,+\infty)$.

- $\int_{-1}^{0} \frac{y}{(y+1)(y+2)}\,\mathrm{d}y$: Rozdělíme na $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{y}{(y+1)(y+2)}\,\mathrm{d}y$ a $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{y}{(y+1)(y+2)}\,\mathrm{d}y$. Protože $g(-1) = 0$ a $g'(-1) = -1$, podle věty 3 (3) (přesněji podle její modifikace pro zápornou funkci) první integrál diverguje. Konvergence druhého integrálu se dokáže analogicky jako v předchozím bodě. Protože g je záporná na $(-1,0)$, řešení s hodnotami v tomto intervalu je definované na $(T,+\infty)$.

- $\int_{-2}^{-1} \frac{y}{(y+1)(y+2)}\,\mathrm{d}y$: Postupujeme stejně jako výše, ale zapisujeme stručněji. Vzhledem k tomu, že $g(-2) = 0$ a $g'(-2) = \frac{1}{2}$, můžeme použít větu 3 (3). Integrál „diverguje u -2“ a „diverguje u -1“. Řešení s hodnotami v $(-2,-1)$ je definováno na $\mathbf{R}$.

- $\int_{-\infty}^{-2} \frac{y}{(y+1)(y+2)}\,\mathrm{d}y$: Z věty 4 (2) dostáváme, že integrál „diverguje u $-\infty$", protože

$$\lim_{y\to-\infty} \frac{g(y)}{y} = \lim_{y\to-\infty} \frac{(y+1)(y+2)}{y^2} = 1.$$

  Zároveň víme, že „diverguje u -2". Řešení s hodnotami v $(-\infty,-2)$ je opět definováno na $\mathbf{R}$.

Nyní máme všechny informace potřebné k tomu, abychom mohli načrtnout průběh řešení (viz aplet v GeoGebře). Žádné řešení se nenapojuje na stacionární (nelze lepit). Všimněte si, že řešení s hodnotami v $(0,+\infty)$ a v $(-1,0)$ se k ose x přibližují „kolmo", což odpovídá tomu, že

$$\lim_{y\to 0+} y' = \lim_{y\to 0+} \frac{(y+1)(y+2)}{y} = +\infty, \quad \lim_{y\to 0-} y' = \lim_{y\to 0-} \frac{(y+1)(y+2)}{y} = -\infty,$$

tj. jednostranná derivace funkce y v levém krajním bodě definičního oboru je plus nebo mínus nekonečno.

Načrtněte graf řešení, aniž explicitně vyřešíte rovnici

1. $y' = \frac{y^2+1}{y-1}$

2. $y' = \frac{y^3+1}{y-1}$

3. $y' = \frac{1}{y}\sqrt{1-y^2}$

4. $y' = (y+1)(y+2)(y+3)$

5. $y' = (y-1)^2\sqrt[3]{y-2}(y-3)$

6. $y' = \sqrt{|\cos y|}$

7. $y' = \sin^2 y$

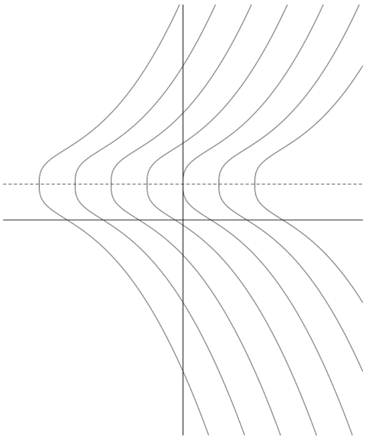
8. $y' = \cos y \cdot \sqrt{\sin y}$

9. $y' = \sqrt{e^{|y|}-1} \cdot e^y \cdot (y-1)$

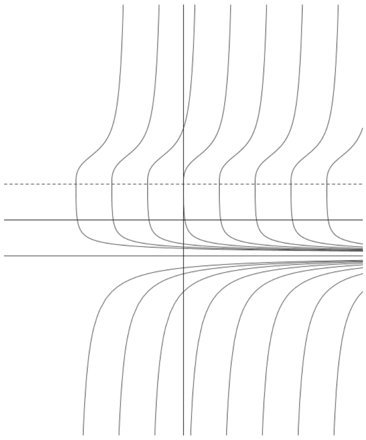
10. $y' = \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} y}\cdot(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg} y)}{\operatorname{arctg}(y+1)}$ *(Nemusíte vyšetřovat konvexitu/konkavitu.)*

Výsledky. **1.** Řešení s hodnotami v $(-\infty,1)$ jsou klesající a definovaná na intervalech typu $(T,+\infty)$, před dosažením hodnoty $1-\sqrt{2}$ jsou ryze konvexní, po jejím dosažení ryze konkávní. Řešení s hodnotami v $(1,+\infty)$ jsou rostoucí a definovaná na intervalech typu $(T,+\infty)$, před dosažením hodnoty $1+\sqrt{2}$ jsou ryze konkávní, po jejím dosažení ryze konvexní. **2.** Stacionární řešení -1. $(-\infty,-1)$: rostoucí, ryze konkávní, $(T,+\infty)$; $(-1,1)$: klesající, ryze konvexní, $(T,+\infty)$; $(1,+\infty)$: rostoucí, ryze konkávní do dosažení y_0, pak ryze konvexní, kde y_0 je jediný reálný kořen polynomu $2t^3-3t^2-1$, (T_1,T_2). **3.** Stacionární řešení -1, 1. $(-1,0)$: klesající, ryze konvexní, (T_1,T_2), lze nalepit s. ř. -1; $(0,1)$: rostoucí, ryze konvexní, (T_1,T_2), lze nalepit s. ř. 1. **4.** Stacionární řešení -1, -2, -3. $(-\infty,-3)$: klesající, ryze konkávní, $(-\infty,T)$; $(-3,-2)$: rostoucí, ryze konvexní do dosažení $-2-\frac{1}{\sqrt{3}}$, pak ryze konkávní, $\mathbf{R}$; $(-2,-1)$: klesající, ryze konkávní do dosažení $-2+\frac{1}{\sqrt{3}}$, pak ryze konvexní, $\mathbf{R}$; $(-1,+\infty)$: rostoucí, ryze konvexní, $(-\infty,T)$. **5.** Stacionární řešení 1, 2, 3. $(-\infty,1)$: rostoucí, ryze konkávní, $(T,+\infty)$; $(1,2)$: rostoucí, ryze konvexní do dosažení $\frac{5}{2}$, pak ryze konkávní, $(-\infty,T)$, lze nalepit s. ř. 2; $(2,3)$: klesající, ryze konkávní do dosažení $\frac{9}{5}$, pak ryze konvexní, $(-\infty,T)$, lze nalepit s. ř. 2.; $(3,+\infty)$: rostoucí, ryze konvexní, $(-\infty,T)$. **6.** Stacionární řešení $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$: rostoucí, ryze konvexní do dosažení $k\pi$, pak ryze konkávní, (T_1,T_2), lze nalepit s.ř. $-\frac{\pi}{2}+k\pi$ i $\frac{\pi}{2}+k\pi$. (V tomto příkladě je mnoho možností lepení, protože ne každé stacionární řešení lze navázat z obou stran.) **7.** Stacionární řešení $k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. $(k\pi,(k+1)\pi)$: rostoucí, ryze konvexní do dosažení $\frac{\pi}{2}+k\pi$, pak ryze konkávní, $\mathbf{R}$. **8.** Stacionární řešení $k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, a $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. $(2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi)$: rostoucí, ryze konvexní do dosažení $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}+2k\pi$, pak ryze konkávní, $(T,+\infty)$, lze nalepit s. ř. $2k\pi$; $(\frac{\pi}{2}+2k\pi,(2k+1)\pi)$: klesající, ryze konkávní do dosažení $\pi-\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}+2k\pi$, pak ryze konvexní, $(T,+\infty)$, lze nalepit s. ř. $(2k+1)\pi$. **9.** Stacionární řešení 0, 1. $(-\infty,0)$: klesající, ryze konkávní do dosažení y_0, pak ryze konvexní, $(T,+\infty)$, lze nalepit s. ř. 0; $(0,1)$: klesající, ryze konkávní do dosažení y_1, pak ryze konvexní, $(T,+\infty)$, lze nalepit s. ř. 0; $(1,+\infty)$: rostoucí, ryze konvexní, $(T,+\infty)$. (Hodnoty y_0 a y_1 jsou řešení jistých rovnic, nelze je vyjádřit explicitně, lze však ukázat, že existují a jsou jednoznačně určena.) **10.** Stacionární řešení: 0, 1. $(-\infty,-1)$: rostoucí, $(-\infty,T)$: $(-1,0)$: klesající, (T_1,T_2), lze nalepit s. ř. 0; $(0,1)$: rostoucí, $(T,+\infty)$, lze nalepit s. ř. 0; $(1,+\infty)$: klesající, $\mathbf{R}$.

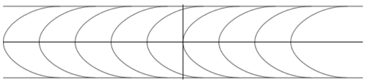
1.



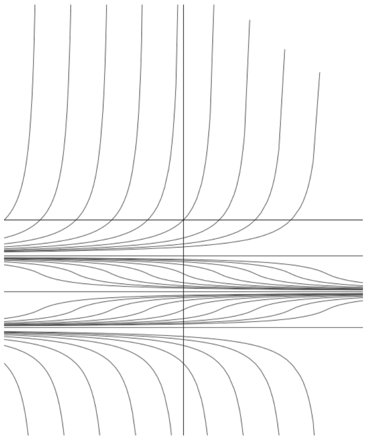
2.



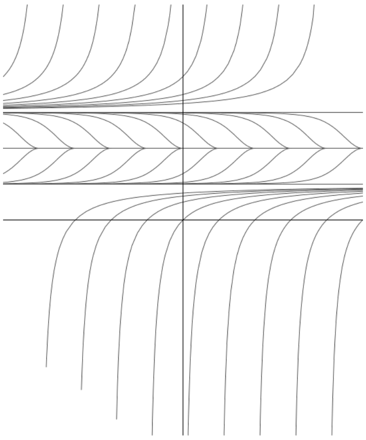
3.



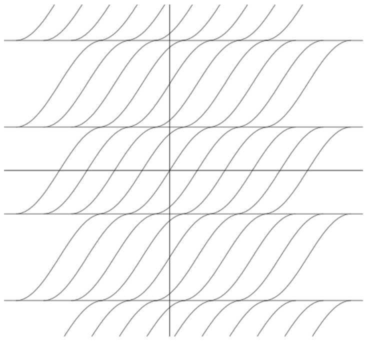
4.



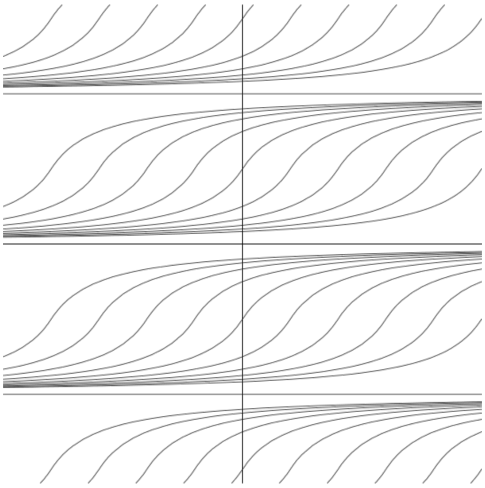
5.



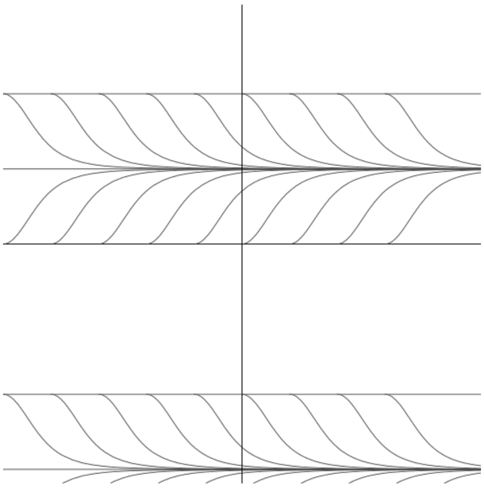
6.



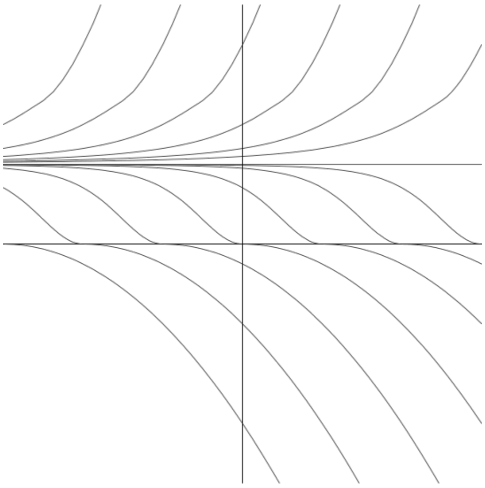
7.



8.



9.



10.