# Rovnice se separovanými proměnnými

**Příklad 1.** *Pro diferenciální rovnici* $yy' + xy^2 = x$ *nalezněte*
*(a) všechna maximální řešení,* *(b) maximální řešení procházející bodem* $[1, 0]$.

*Řešení:*

$$yy' + xy^2 = x$$
$$y' = \frac{1-y^2}{y} \cdot x$$

**Krok 1.** $h(x) = x$, $D_h = \mathbf{R}$

**Krok 2.** $g(y) = \frac{1-y^2}{y}$, $D_g = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $g(y) = 0$ pro $y \in \{-1, 1\}$
Singulární řešení: $y_0^1 = 1$ na $\mathbf{R}$ a $y_0^2 = -1$ na $\mathbf{R}$.

**Krok 3.** $g$ je spojitá a nenulová na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ a $(1, +\infty)$
Všimněte si ale, že v původní rovnici může být také $y = 0$.

**Krok 4.**

$$\frac{yy'}{1-y^2} = x$$
$$\int \frac{y}{1-y^2}\, \mathrm{d}y = \int x\, \mathrm{d}x$$
$$-\frac{1}{2}\log|1-y^2| = \frac{1}{2}x^2 + C$$
$$\log|1-y^2| = C - x^2$$
$$1 - y^2 = ce^{-x^2}$$
$$y^2 = 1 - ce^{-x^2}$$

$C$ a $c$ značí libovolné konstanty.

**Krok 5.** V závislosti na $c \in \mathbf{R}$ hledáme řešení $y(x)$ definované na intervalu $I$. Obor hodnot $y(I)$ musí být obsažen v jednom z intervalů z kroku 3.

I. $c > 0$: $1 - ce^{-x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 > \log c$

(a) $c \geq 1$: $\log c \geq 0 \ldots x^2 > \log c \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{\log c}) \cup (\sqrt{\log c}, +\infty)$

$$y(x) = \sqrt{1 - ce^{-x^2}}, \qquad x \in (\sqrt{\log c}, +\infty)$$
$$y(x) = -\sqrt{1 - ce^{-x^2}}, \qquad x \in (\sqrt{\log c}, +\infty)$$
$$y(x) = \sqrt{1 - ce^{-x^2}}, \qquad x \in (-\infty, -\sqrt{\log c})$$
$$y(x) = -\sqrt{1 - ce^{-x^2}}, \qquad x \in (-\infty, -\sqrt{\log c})$$

(b) $c \in (0,1)$: $\log c < 0 \dots x^2 > \log c \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}$

$$y(x) = \sqrt{1 - ce^{-x^2}}, \qquad x \in \mathbf{R}$$
$$y(x) = -\sqrt{1 - ce^{-x^2}}, \qquad x \in \mathbf{R}$$

II. $c < 0$: $1 - ce^{-x^2} > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}$

$$y(x) = \sqrt{1 - ce^{-x^2}}, \qquad x \in \mathbf{R}$$
$$y(x) = -\sqrt{1 - ce^{-x^2}}, \qquad x \in \mathbf{R}$$

III. $c = 0$: Dostáváme singulární řešení (viz krok 2).

**Krok 6 (lepení).**

$$\lim_{x \to -\sqrt{\log c}-} \pm\sqrt{1 - ce^{-x^2}} = 0$$
$$\lim_{x \to \sqrt{\log c}+} \pm\sqrt{1 - ce^{-x^2}} = 0$$

Přichází v úvahu nalepení řešení pro $c = 1$ v bodě 0. Ale pozor! Nemůžeme použít metodu z přednášky (krok 6 v oddílu XIV.1), protože bod 0 nepatří do definičního oboru funkce $g$.

Pro řešení $y(x) = -\sqrt{1 - e^{-x^2}}$, $x \in (-\infty, 0)$ z rovnice dostáváme

$$y'(x) = x \cdot \frac{1 - y(x)^2}{y(x)} = -x\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}, \quad x \in (-\infty, 0).$$

Vypočítáme limitu $y'(x)$ pro $x \to 0-$. Využijeme $1 - e^{-x^2} = 1 - (1 - x^2 + o(x^2)) = x^2 + o(x^2)$.

$$\lim_{x \to 0-} y'(x) = \lim_{x \to 0-} e^{-x^2} \lim_{x \to 0-} \frac{-x}{\sqrt{x^2 + o(x^2)}} = \lim_{x \to 0-} \frac{-x}{|x|\sqrt{1 + \frac{o(x^2)}{x^2}}} = 1.$$

Dále pro $y(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$, $x \in (0, +\infty)$ máme $y'(x) = x\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$ pro $x \in (0, +\infty)$ a

$$\lim_{x \to 0+} y'(x) = \lim_{x \to 0+} e^{-x^2} \lim_{x \to 0+} \frac{x}{\sqrt{x^2 + o(x^2)}} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x\sqrt{1 + \frac{o(x^2)}{x^2}}} = 1.$$

Můžeme tedy řešení slepit v bodě $y = 0$ a dostaneme maximální řešení

$$y_1^1(x) = \operatorname{sgn} x \sqrt{1 - e^{-x^2}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Podobně slepením $y(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$ pro $x \in (-\infty, 0)$ a $y(x) = -\sqrt{1 - e^{-x^2}}$ pro $x \in (0, \infty)$ dostaneme maximální řešení

$$y_1^2(x) = -\operatorname{sgn} x \sqrt{1 - e^{-x^2}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

**Závěr.** Všechna maximální řešení jsou

$$\begin{aligned} y_0^1 &= 1 && \text{na } \mathbf{R} \\ y_0^2 &= -1 && \text{na } \mathbf{R} \\ y_1^1(x) &= \operatorname{sgn} x\sqrt{1-e^{-x^2}} && \text{na } \mathbf{R} \\ y_1^2(x) &= -\operatorname{sgn} x\sqrt{1-e^{-x^2}} && \text{na } \mathbf{R} \end{aligned}$$

pro $c \in (1, +\infty)$:

$$\begin{aligned} y_c^1(x) &= \sqrt{1-ce^{-x^2}}, && x \in (\sqrt{\log c}, +\infty) \\ y_c^2(x) &= -\sqrt{1-ce^{-x^2}}, && x \in (\sqrt{\log c}, +\infty) \\ y_c^3(x) &= \sqrt{1-ce^{-x^2}}, && x \in (-\infty, -\sqrt{\log c}) \\ y_c^4(x) &= -\sqrt{1-ce^{-x^2}}, && x \in (-\infty, -\sqrt{\log c}) \end{aligned}$$

pro $c \in (-\infty, 0)$ nebo $c \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} y_c^1(x) &= \sqrt{1-ce^{-x^2}}, && x \in \mathbf{R} \\ y_c^2(x) &= -\sqrt{1-ce^{-x^2}}, && x \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Řešení $y(x)$ procházející bodem $[1, 0]$ musí splňovat: 1. je definované pro $x = 1$, 2. $y(1) = 0$. Druhá podmínka implikuje

$$\sqrt{1-ce^{-1}} = 0 \Rightarrow c = e.$$

Žádné z řešení pro $c = e$ není definované v bodě $x = 1$. Odpověď je, že požadované řešení neexistuje.

Rovnice se separovanými proměnnými.

**1.** Pro diferenciální rovnici $y' = -\frac{(1+y^2)x}{1+x^2}$ nalezněte
(a) všechna maximální řešení, (b) maximální řešení procházející bodem $[0,1]$.

**2.** Nalezněte všechna maximální řešení rovnice $y' = \frac{\cos x}{e^y}$. Určete množinu všech bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází právě jedno řešení definované na celém $\mathbf{R}$.

**3.** Řešte rovnici $y'(2-e^x) = -3e^x \operatorname{tg} y \cos^2 y$. Pro která $A$ existuje řešení s vlastností $\lim_{x\to+\infty} y(x) - \lim_{x\to-\infty} y(x) = A$?

Najděte všechna maximální řešení následujících rovnic

**4.** $yy' = \frac{1-2x}{y}$

**5.** $xy' + y = y^2$

**6.** $y' = 10^{x+y}$

**7.** $e^{-y}(1+y') = 1$

**8.** $y' \sin x = y \ln y$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

**9.** $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$, $y(0) = 1$

**10.*** $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$, $x \in (-1,1)$

---

Výsledky. **1.** (a) $y_c^1(x) = \operatorname{tg}(c - \frac{1}{2}\log(1+x^2))$, $x \in (\sqrt{\exp(-\pi+2c)-1}, \sqrt{\exp(\pi+2c)-1})$, $y_c^2(x) = \operatorname{tg}(c - \frac{1}{2}\log(1+x^2))$, $x \in (-\sqrt{\exp(\pi+2c)-1}, -\sqrt{\exp(-\pi+2c)-1})$ pro $c \geq \frac{\pi}{2}$; $y_c(x) = \operatorname{tg}(c - \frac{1}{2}\log(1+x^2))$, $x \in (-\sqrt{\exp(\pi+2c)-1}, \sqrt{\exp(\pi+2c)-1})$ pro $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. (b) $y_{\frac{\pi}{4}}(x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log(1+x^2))$, $x \in \left(-\sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi)-1}, \sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi)-1}\right)$. **2.** $y_c(x) = \log(\sin x + c)$, $x \in \mathbf{R}$, pro $c > 1$; $y_c^k(x) = \log(\sin x + c)$, $x \in (2k\pi - \arcsin c, (2k+1)\pi + \arcsin c)$, $k \in \mathbf{Z}$, pro $c \in (-1,1]$; $\{[x,y] \in \mathbf{R}^2 : y > \log(\sin x + 1) \text{ nebo } \sin x = -1\}$. **3.** $y_{a,b,k}(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(a(e^x-2)^3) + k\pi & x \in [\log 2, +\infty) \\ \operatorname{arctg}(b(e^x-2)^3)) + k\pi & x \in (-\infty, \log 2) \end{cases}$ pro $a, b \in \mathbf{R}$ a $k \in \mathbf{Z}$. Hledanou množinou je interval $(-\pi, \pi)$. **4.** $y_c(x) = \sqrt[3]{3(x-x^2+c)}$, $x \in \mathbf{R}$ pro $c < -\frac{1}{4}$; $y_{-1/4}^{1,2}(x) = -\sqrt[3]{3(x-\frac{1}{2})^2}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$ nebo $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$; $y_c^{1,2,3}(x) = \sqrt[3]{3(x-x^2+c)}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4c})$ nebo $x \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4c}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4c})$ nebo $x \in (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4c}, +\infty)$ pro $c > -\frac{1}{4}$. **5.** $y_0(x) = 1$, $x \in \mathbf{R}$; $y_\infty(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$; $y_c^{1,2}(x) = \frac{1}{1-cx}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{c})$ nebo $x \in (\frac{1}{c}, \infty)$, pro $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. **6.** $y_c(x) = -\log_{10}(c - 10^x)$, $x \in (-\infty, \log_{10} c)$ pro $c > 0$. **7.** $y_\infty(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$; $y_c^1(x) = -\log(1+e^{x-c})$, $x \in \mathbf{R}$ pro $c \in \mathbf{R}$; $y_c^2(x) = -\log(1-e^{x-c})$, $x \in (-\infty, -c)$ pro $c \in \mathbf{R}$. **8.** $y_0(x) = 1$, $x \in \mathbf{R}$; $y_c^k(x) = e^{c \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$, $x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$, pro $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je $y_0$. **9.** $y_0(x) = x$, $x \in \mathbf{R}$; $y_\infty^{1,2}(x) = -\frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$; $y_c^{1,2}(x) = \frac{x+c}{1-cx}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{c})$ nebo $x \in (\frac{1}{c}, \infty)$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je $y_1^1$. **10.** $y_{-\frac{3}{2}\pi}(x) = -1$, $x \in (-1,1)$; $y_{\frac{\pi}{2}}(x) = 1$, $x \in (-1,1)$; $y_c(x) = \begin{cases} x \cdot \sin c + \sqrt{1-x^2} \cdot \cos c & x \in (-1, -\sin c) \\ -1 & x \in [-\sin c, 1) \end{cases}$ pro $c \in (-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2})$; $y_c(x) = \begin{cases} x \cdot \sin c + \sqrt{1-x^2} \cdot \cos c & x \in (\sin c, 1) \\ 1 & x \in [-1, \sin c) \end{cases}$ pro $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $y_{-\frac{\pi}{2}}(x) = -x$, $x \in (-1,1)$.