Nehomogenní diferenční rovnice

Příklad 1. *Najděte všechna řešení diferenční rovnice*

$$3y(n+2) - 4y(n+1) + y(n) = \cos\frac{n\pi}{2}. \tag{1}$$

Řešení: Charakteristický polynom $\chi(\lambda) = 3\lambda^2 - 4\lambda + 1$ má dva reálné kořeny $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = \frac{1}{3}$. Věta XII.4 $\Rightarrow$ řešení homogenní rovnice jsou právě posloupnosti $\{y_0(n)\}$ dané předpisem

$$y_0(n) = a + \frac{b}{3^n} \quad (a, b \in \mathbf{R}). \tag{2}$$

Pravá strana je speciálního tvaru $\alpha^n(P(n)\cos(\nu n) + Q(n)\sin(\nu n))$ pro $\alpha = 1$, $P(n) = 1$, $Q(n) = 0$ a $\nu = \frac{\pi}{2}$. Protože číslo $\alpha(\cos\nu + i\sin\nu) = i$ není kořenem charakteristického polynomu, hledáme řešení (1) ve tvaru

$$z(n) = \alpha\cos\frac{n\pi}{2} + \beta\sin\frac{n\pi}{2} \tag{3}$$

(podle věty XII.5). Za použití součtových vzorců

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x\cos y + \cos x\sin y\\ \cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x\sin y\end{aligned}$$

dostáváme

$$\begin{aligned}\cos\frac{(n+2)\pi}{2} &= \cos\Big(\frac{n\pi}{2} + \pi\Big) = -\cos\frac{n\pi}{2}, &\qquad \sin\frac{(n+2)\pi}{2} &= -\sin\frac{n\pi}{2},\\ \cos\frac{(n+1)\pi}{2} &= \cos\Big(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\Big) = -\sin\frac{n\pi}{2}, &\qquad \sin\frac{(n+1)\pi}{2} &= \cos\frac{n\pi}{2}.\end{aligned}$$

Nyní můžeme řešení ve tvaru (3) dosadit do LS rovnice (1):

$$\begin{aligned}&3\left(-\alpha\cos\frac{n\pi}{2} - \beta\sin\frac{n\pi}{2}\right) - 4\left(-\alpha\sin\frac{n\pi}{2} + \beta\cos\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\alpha\cos\frac{n\pi}{2} + \beta\sin\frac{n\pi}{2}\right)\\ &= (-2\alpha - 4\beta)\cos\frac{n\pi}{2} + (4\alpha - 2\beta)\sin\frac{n\pi}{2}\end{aligned}$$

Aby byla hodnota tohoto výrazu rovna $\cos\frac{n\pi}{2}$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$, musí platit

$$\begin{aligned}-2\alpha - 4\beta &= 1\\ 4\alpha - 2\beta &= 0.\end{aligned}$$

Dopočítáme $\alpha = -\frac{1}{10}$, $\beta = -\frac{1}{5}$. Řešení rovnice (1) jsou právě posloupnosti $\{y(n)\}$ dané předpisem

$$y(n) = -\left(\frac{1}{10}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{n\pi}{2}\right) + a + \frac{b}{3^n} \qquad (a, b \in \mathbf{R}).$$

Najděte všechna řešení diferenčních rovnic (s počátečními podmínkami)

1. $y(n+4) - y(n) = \sin \frac{n\pi}{4}$

2. $y(n+4) + y(n) = \sin \frac{n\pi}{4}$

3. $y(n+2) - y(n+1) + y(n) = \sin \frac{n\pi}{3}$

4. $y(n+2) - 2y(n+1) + 2y(n) = \cos n$

5. $y(n+3) - y(n+2) - 2y(n+1) + 2y(n) = n + 2^n$

6. $y(n+2) + 3y(n+1) + 2y(n) = \sin n + \sin 2n$

7. $8y(n+3) + y(n) = 3n + \frac{1}{2^n}$

8. $y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = n^2$, $y(1) = 3$, $y(2) = 2$

9. $y(n+2) - y(n) = 17$, $y(1) = y(2) = 0$

Rozhodněte, která řešení následujících diferenčních rovnic 1. mají vlastní limitu pro $n \to \infty$, 2. jsou omezená, 3. mají limitu $+\infty$ nebo $-\infty$ pro $n \to \infty$.

10. a) $2y(n+3) - 3y(n+2) - 3y(n+1) + 2 = 0$, b) $y(n+2) + 4y(n) = 2n + 1$

Výsledky. **1.** $y(n) = -\frac{1}{2} \sin \frac{n\pi}{4} + a + b \cdot (-1)^n + c \cos \frac{n\pi}{2} + d \sin \frac{n\pi}{2}$ $(a, b, c, d \in \mathbf{R})$ **2.** $y(n) = -\frac{1}{4} n \sin \frac{n\pi}{4} + a \cos \frac{n\pi}{4} + b \sin \frac{n\pi}{4} + c \cos \frac{3n\pi}{4} + d \sin \frac{3n\pi}{4}$ $(a, b, c, d \in \mathbf{R})$ **3.** $y(n) = -n(\frac{\sqrt{3}}{6} \cos \frac{n\pi}{3} + \frac{1}{2} \sin \frac{n\pi}{3}) + a \cos \frac{n\pi}{3} + b \sin \frac{n\pi}{3}$ $(a, b \in \mathbf{R})$ **4.** $y(n) = \frac{(\cos 2 - 2\cos 1 + 2)\cos n + (\sin 2 - 2 \sin 1) \sin n}{(\cos 2 - 2 \cos 1 + 2)^2 + (\sin 2 - 2 \sin 1)^2} + (\sqrt{2})^n \cdot (a \cos \frac{n\pi}{4} + b \sin \frac{n\pi}{4})$ $(a, b \in \mathbf{R})$ **5.** $y(n) = 2^{n-1} - \frac{1}{2} n^2 - \frac{3}{2} n + a + b(\sqrt{2})^n + c(-\sqrt{2})^n$ $(a, b, c \in \mathbf{R})$ **6.** $y(n) = \frac{(\cos 2 + 3\cos 1 + 2)\sin n - (\sin 2 + 3 \sin 1)\cos n}{(\cos 2 + 3 \cos 1 + 2)^2 + (\sin 2 + 3 \sin 1)^2} + \frac{(\cos 4 + 3 \cos 2 + 2) \sin 2n - (\sin 4 + 3 \sin 2) \cos 2n}{(\cos 4 + 3 \cos 2 + 2)^2 + (\sin 4 + 3 \sin 2)^2} + a(-1)^n + b(-2)^n$, $(a, b \in \mathbf{R})$ **7.** $y(n) = \frac{1}{3} n - \frac{8}{9} + \frac{1}{2^{n+1}} + a \cdot (-\frac{1}{2})^n + \frac{1}{2^n}(b \cos \frac{n\pi}{3} + c \sin \frac{n\pi}{3})$ $(a, b, c \in \mathbf{R})$ **8.** $y(n) = 5 \cdot 2^{n-1} - \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{2} n^2 - \frac{13}{6} n + 1$ **9.** $y(n) = \frac{17}{2} n - \frac{17}{4} \cdot (-1)^n - \frac{51}{4}$ **10.** a) $y(n) = a(-1)^n + b \cdot 2^n + c(\frac{1}{2})^n$ $(a, b, c \in \mathbf{R})$ má vlastní limitu $\Leftrightarrow a = b = 0$, je omezené $\Leftrightarrow b = 0$ a má limitu $\pm\infty \Leftrightarrow b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, b) $y(n) = \frac{2}{5} n + \frac{1}{25} + 2^n (a \cos \frac{n\pi}{2} + b \sin \frac{n\pi}{2})$ $(a, b \in \mathbf{R})$ má limitu $+\infty$ $\Leftrightarrow a = b = 0$, v ostatních případech nemá limitu a není omezené.