Lineární rovnice - snižování řádu, variace konstant

1. $y'' - \frac{xy'}{x^2+1} + \frac{y}{x^2+1} = 0$

2. $y'' - x^2y' + (x^2-1)y = 0$

3. $y'' - \frac{2y}{x^2} = 5$

4. $y'' - \frac{1+x^2}{x}y' + 2y = 0$

5. $y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{5}{x^2}y = x^3$

6. $y'' + \frac{1-x^2}{x}y' + \frac{y}{\log x} = 0$

7. $y'' + \frac{y}{x^2 \log x} = 0$

8. $x^2y'' + x(x^2+3)y' - (x^2+3)y = 0$

– –

Výsledky. Snažíme se uhodnout jedno řešení homogenní rovnice, zkoušíme např. $x^n, e^x, \log x$. Rovnici s nenulovou pravou stranou pak řešíme variací konstant (příklady 3 a 5). **1.** FS tvoří $y_1 = x$ a $y_2 = x\log(x+\sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1}$ na $\mathbf{R}$. **2.** FS tvoří $y_1 = e^x$ a $y_2 = e^x \int_0^x e^{\frac{1}{3}t(t^2-6)}\,\mathrm{d}t$ na $\mathbf{R}$. **3.** FS tvoří $y_1 = x^2$ a $y_2 = \frac{1}{x}$, partikulární řešení je např. $y_p = \frac{5}{3}x^2\log|x|$ (z variace konstant vyjde $\frac{5}{3}x^2\log|x| - \frac{5}{9}x^2$, přitom $-\frac{5}{9}x^2$ je řešením homogenní rovnice) pro $x \in (-\infty,0)$ nebo $(0,+\infty)$. **4.** FS tvoří $y_1 = x^2$ a $y_2 = x^2\int_1^x \frac{1}{t^3}e^{t^2/2}\,\mathrm{d}t$ pro $x \in (0,+\infty)$; pro $x \in (-\infty,0)$ je $y_2 = x^2\int_{-1}^x \frac{1}{t^3}e^{t^2/2}\,\mathrm{d}t$. **5.** FS tvoří $y_1 = x$ a $y_2 = x^5$, partikulární řešení je např. $y_p = \frac{1}{4}x^5\log|x|$ pro $x \in (-\infty,0)$ nebo $(0,+\infty)$. **6.** FS tvoří $y_1 = \log x$ a $y_2 = \log x\int_2^x \frac{e^{t^2/2}}{t\log^2 t}\,\mathrm{d}t$ pro $x \in (1,+\infty)$; pro $x \in (0,1)$ je $y_2 = \log x\int_{1/2}^x \frac{e^{t^2/2}}{t\log^2 t}\,\mathrm{d}t$. **7.** FS tvoří $y_1 = \log x$ a $y_2 = \log x\int_2^x \frac{1}{\log^2 t}\,\mathrm{d}t$ pro $x \in (1,+\infty)$; pro $x \in (0,1)$ je $y_2 = \log x\int_{1/2}^x \frac{1}{\log^2 t}\,\mathrm{d}t$. **8.** FS tvoří $y_1 = x$ a $y_2 = xe^{x^2/2}$ na $\mathbf{R}$.