Homogenní diferenční rovnice

Příklad 1. *Najděte řešení diferenční rovnice*

$$y(n+2) = 4y(n+1) - 8y(n) \tag{1}$$

s počátečními podmínkami $y(1) = 0, y(2) = -8$.

Řešení: Převedeme rovnici do tvaru

$$y(n+2) - 4y(n+1) + 8y(n) = 0. \tag{2}$$

Rovnice (2) je homogenní lineární diferenční rovnice druhého řádu s konstatními koeficienty. Podle větičky XII.1 má počáteční úloha právě jedno řešení. Charakteristický polynom rovnice (2) je

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 8.$$

Polynom χ má diskriminant $\Delta = -16$, jeho kořeny jsou tedy $\lambda_{1,2} = 2 \pm 2i$. Označíme $\xi = 2 + 2i$ kořen s kladnou imaginární částí. Absolutní hodnota ξ je $\mu = |\xi| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Vyjádříme

$$\xi = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Podle věty XII.4 tvoří posloupnosti $y^1(n) = (2\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4}$ a $y^2(n) = (2\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4}$ fundamentální systém řešení rovnice (2). Obecné řešení má tedy tvar

$$y(n) = ay^1(n) + by^2(n) = (2\sqrt{2})^n\left(a\cos\frac{n\pi}{4} + b\sin\frac{n\pi}{4}\right) \quad (a, b \in \mathbf{R}).$$

Hledáme řešení vyhovující počátečním podmínkám. Koeficienty a a b najdeme dosazením.

$$\begin{aligned} 0 = y(1) &= 2\sqrt{2}\left(a\cos\frac{\pi}{4} + b\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2a + 2b \\ -8 = y(2) &= (2\sqrt{2})^2\left(a\cos\frac{\pi}{2} + b\sin\frac{\pi}{2}\right) = 8b. \end{aligned}$$

Vyřešením soustavy dostáváme $b = -1$, $a = 1$. **Závěr:** Řešení rovnice (1) je

$$y(n) = (2\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

Příklad 2. *Najděte všechna řešení diferenční rovnice*

$$y(n+3) + y(n+2) - y(n+1) - y(n) = 0. \tag{3}$$

Řešení: Charakteristický polynom $\chi(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1$ má kořen $\lambda_1 = 1$. Rozložíme

$$\chi(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2.$$

Z věty XII.4 dostáváme, že posloupnosti $y^1(n) = 1$, $y^2(n) = (-1)^n$ a $y^3(n) = n(-1)^n$ tvoří fundamentální systém řešení (3). Všechna řešení jsou tedy právě posloupnosti tvaru

$$y(n) = a + (b + cn)(-1)^n \quad (a, b, c \in \mathbf{R}).$$

Najděte všechna řešení diferenčních rovnic (s počátečními podmínkami)

1. $y(n+2) + 4y(n+1) + 4y(n) = 0$

2. $y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = 0$

3. $y(n+2) + 16y(n) = 0$

4. $y(n+2) - 6y(n+1) + 13y(n) = 0$, $y(1) = 0$

5. $y(n+2) - 2y(n+1) - 3y(n) = 0$, $y(1) = 2$, $y(2) = 1$

6. $y(n+2) - y(n+1) - y(n) = 0$, $y(1) = y(2) = 1$

7. $9y(n+2) + 6y(n+1) + y(n) = 0$, $y(1) = 0$

8. $y(n+3) - 7y(n+2) + 16y(n+1) - 12y(n) = 0$, $y(1) = 1, y(2) = 1, y(3) = -9$

9. $y(n+3) + 5y(n+2) - 6y(n) = 0$

10. $y(n+4) + 6y(n+2) + 9y(n) = 0$

Výsledky. **1.** $y(n) = (a+bn)\cdot(-2)^n$ $(a, b \in \mathbf{R})$ **2.** $y(n) = a + b\cdot 2^n$ $(a, b \in \mathbf{R})$ **3.** $y(n) = 4^n(a\cos\frac{n\pi}{2} + b\sin\frac{n\pi}{2})$ $(a, b \in \mathbf{R})$ **4.** $y(n) = \frac{a}{2}\cdot(\sqrt{13})^n\cdot(2\cos(n\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}) - 3\sin(n\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}))$ $(a \in \mathbf{R})$ **5.** $y(n) = \frac{1}{4}(3^n - 5\cdot(-1)^n)$ **6.** $y(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$ **7.** $y(n) = a((-\frac{1}{3})^n - n(-\frac{1}{3})^n)$ $(a \in \mathbf{R})$ **8.** $y(n) = 3\cdot 2^n + 2n\cdot 2^n - 3^{n+1}$ **9.** $y(n) = a + b(-3+\sqrt{3})^n + c(-3-\sqrt{3})^n$, $(a, b, c \in \mathbf{R})$ **10.** $y(n) = (\sqrt{3})^n((a+bn)\cos\frac{n\pi}{2} + (c+dn)\sin\frac{n\pi}{2})$ $(a, b, c, d \in \mathbf{R})$