

---

## Úlohy k cvičení

### Grafy

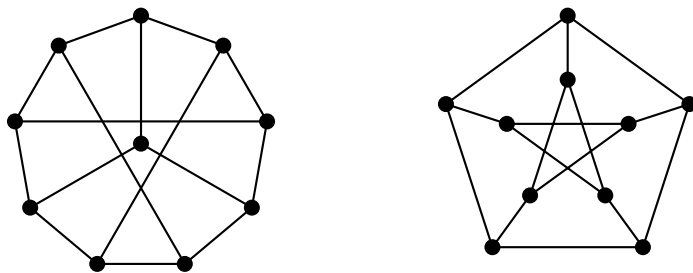
Připomenutí: *Graf* je dvojice  $G = (V, E)$ , kde  $E \subseteq \binom{V}{2}$ . Pokud není explicitně řečeno jinak, v úlohách uvažujeme pouze konečné grafy (tedy takové, že  $V$  je konečná).

Dva grafy  $G = (V, E)$  a  $G' = (V', E')$  jsou *izomorfní*, pokud existuje bijekce  $f: V \rightarrow V'$  taková, že pro každé  $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$  máme  $\{u, v\} \in E$ , právě když  $\{f(u), f(v)\} \in E'$ .

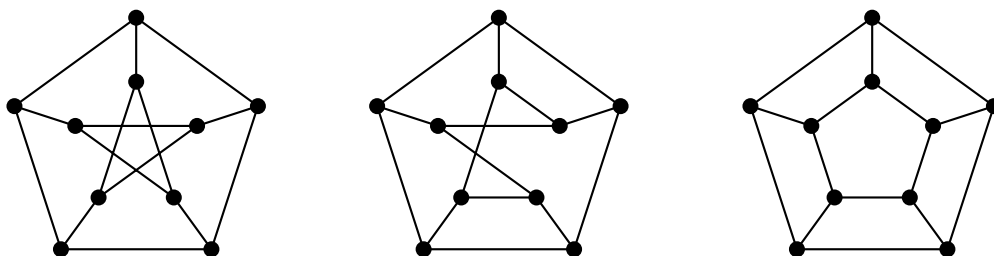
Je-li dán graf  $G = (V, E)$ , potom jeho *podgraf* je graf  $G' = (V', E')$ , pokud  $V' \subseteq V$  a  $E' \subseteq E$ . Pokud navíc platí  $E' = E \cap \binom{V'}{2}$ , je  $G'$  *indukovaný podgraf*.

*Doplňek* grafu  $G = (V, E)$  je graf  $\bar{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$ .

*Úloha 1:* Nalezněte izomorfismus grafů na obrázku.



*Úloha 2:* Ukažte, že žádné dva grafy na obrázku nejsou izomorfní.



*Úloha 3:* Nalezněte všechny neizomorfní grafy na čtyřech vrcholech. U každého určete, kolik by měl izomorfních protějšků, kdyby množina vrcholů byla předepsaná, například  $\{u, v, w, x\}$ .

*Úloha 4:* Uvažme množinu vrcholů  $\{1, \dots, n\}$ . Kolik je na této množině různých, ale vzájemně izomorfních:

- úplných grafů  $K_n$ ;
- cest s  $n$  vrcholy;
- kružnic  $C_n$ ;
- úplných bipartitních grafů  $K_{k, n-k}$  v závislosti na  $k$ ;

e) disjunktních sjednocení dvou úplných grafů  $K_k$  a  $K_{n-k}$  v závislosti na  $k$ ;

f) grafů, v nichž každý vrchol má stupeň 1?

*Úloha 5:* Existuje bipartitní graf s alespoň 5 vrcholy, jehož doplněk je také bipartitní?

*Úloha 6:* Dokažte, že dva grafy jsou izomorfní, právě když jsou izomorfní jejich doplňky.

*Úloha 7\*:* Pro každé  $n$  přirozené sestrojte graf, který má přesně  $n$  *automorfismů*, tedy izomorfismů zobrazujících tento graf na sebe.

*Úloha 8:* Najděte všechny grafy, které neobsahují jako podgraf

a) cestu délky 2;

b\*) cestu délky 3.

*Úloha 9\*:* Najděte všechny grafy, které neobsahují cestu délky 2 jako indukovaný podgraf.

*Úloha 10:* Ukažte, když graf  $G$  obsahuje lichou kružnici jako podgraf, tak také obsahuje nějakou lichou kružnici jako indukovaný podgraf.

*Úloha 11:* Najděte všechny kružnice, které jsou izomorfní svému doplňku.