Úlohy k cvičení

Kombinatorické počítání

Úloha 1: Kolika způsoby lze rozestavit černého a bílého krále na šachovnici tak, aby se navzájem neohrožovali? (T.j. nestáli na sousedních políčkách.)

Úloha 2: Kolik slov lze sestavit z písmen slova MISSISSIPPI?

Úloha 3: Určete počet

(a) uspořádaných dvojic (A, B), kde $A \subseteq B \subseteq [n]$.

(b) uspořádaných čtveřic (A, B, C, D), kde $A \subseteq B \subseteq D \subseteq [n]$ a také $A \subseteq C \subseteq D$.

Úloha 4: Z n předmětů vybíráme k. Do následující tabulky doplňte počty možných výběrů:

	záleží na pořadí	nezáleží na pořadí
bez opakování		
s opakováním		

Úloha 5: Rozmísťujeme k kuliček do přihrádek označených čísly 1 až n. Do následující tabulky doplňte počty možných výběrů:

Kuličky jsou: \ Kuliček v přihrádce:	nejvýše jedna	libovolně mnoho	alespoň jedna
různobarevné			
stejnobarevné			

Pozn.: Políčko vpravo nahoře se Vám podaří vyplnit nejspíše až když budete znát princip inkluze a exkluze.

Úloha 6:* Barevná inkoustová tiskárna dokáže umístit až 8 kapek na jeden bod. Kapka může mít azurovou (C-Cyan), fialovou (M-Magenta), žlutou (Y-Yellow) nebo černou (K-blacK) barvu. Kolik různých barevných odstínů lze dosáhnout v jednom bodě, předpokládáme-li, že smíšení tří různobarevných (CMY) kapek má stejný efekt, jako dvě černé? (Např. odstín 3C+2Y+M+K je stejný jako 2C+Y+3K.)

Úloha 7:* Kolik existuje různých rozdělení pravidelného n-úhelníku na trojúhelníky, tak že řezy vedou podél tětiv, které se vzájemně nekříží a navíc každý trojúhelník má alespoň jednu stranu společnou s n-úhelníkem?

Např. pětiúhelník *abcde* lze rozdělit na tři trojúhleníky *abc*, *acd* a *ade*.

Úloha 8: Kolik je v konvexním n-úhelníku dvojic tětiv, jež se navzájem protínají uvnitř n-úhelníku, tedy nikoli v krajních bodech?

Princip inkluze a exkluze

Připomenutí: Jsou-li $A_1, \ldots, A_n$ konečné množiny, potom platí

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup \cdots \cup A_n| &= |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \\
&\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \cdots - |A_{n-1} \cap A_n| \text{ (všechny dvojice)} \\
&\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \text{ (všechny trojice)} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (-1)^n |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.
\end{aligned}$$

Kompaktně zapsáno:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{I \subseteq [n], I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Úloha 9: Určete počet přirozených čísel od 1 do 840, která nejsou dělitelná 6, 10 ani 14.

Úloha 10: Kolik čísel zbyde z $1, \ldots, n$ po vyškrtání násobků 2, 3, 5 a 7?

Úloha 11:

(a) Prodavač suvenýrů má na prodej tři stejné figurky papeže Jana Pavla II, čtyři Jánošíky a pět Švejků. Kolika způsoby může figurky vyrovnat do výlohy do jedné řady tak, aby se nikdy nestalo, že by všechny figurky stejné postavy tvořily souvislý blok?

(b) Kolika způsoby lze postavit do řady 5 Čechů, 4 Slováky a 3 Poláky tak, aby všichni příslušníci žádného národa netvořili souvislý blok? Na rozdíl od předchozí varianty jsou nyní osoby navzájem rozeznatelné.

Úloha 12: Kolik existuje pořadí písmen A, B, D, E, I, K, M, N, R, Ů, Z takových, že po vynechání některých písmen nevznikne ani jedno ze slov

1. BAR, DEN, RAZIE
2. ARZEN, DRAK, DŮM, DŮRAZ.