Úlohy k cvičení

Kombinatorické počítání

Připomenutí: Pro $n \geq k \geq 0$ je kombinační číslo $\binom{n}{k}$ definované jako počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny. Kombinační číslo lze vyjádřit jako:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Binomická věta říká, že pro libovolná a, b reálná (dokonce i komplexní) a $n \geq 0$ celé platí

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Úloha 1: Jakou nejvyšší mocninou 5 je dělitelné 50! ? Určete obecný vzorec pro prvočíslo p a faktoriál čísla n.

Úloha 2: Ukažte, že $(k!)^n$ dělí $(kn)!$

Úloha 3: Dokažte výpočtem a kombinatorickou úvahou

(a) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

(b) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

(c) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

(d) $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$

(e) $\sum\limits_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}$

(f) $\sum\limits_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$

Úloha 4: Sečtěte

(a) $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$

(b*) $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$

(c***) $\sum\limits_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2k}$

(d***) $\sum\limits_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2k+1}$

Úloha 5: Kolika způsoby lze rozestavit černého a bílého krále na šachovnici tak, aby se navzájem neohrožovali? (T.j. nestáli na sousedních políčkách.)

Úloha 6: Kolik slov lze sestavit z písmen slova MISSISSIPPI?

Úloha 7: Určete počet

(a) uspořádaných dvojic (A, B), kde $A \subseteq B \subseteq [n]$.

(b) uspořádaných čtveřic (A, B, C, D), kde $A \subseteq B \subseteq D \subseteq [n]$ a také $A \subseteq C \subseteq D$.

Úloha 8: Z n předmětů vybíráme k. Do následující tabulky doplňte počty možných výběrů:

	záleží na pořadí	nezáleží na pořadí
bez opakování		
s opakováním		

Úloha 9: Rozmísťujeme k kuliček do přihrádek označených čísly 1 až n. Do následující tabulky doplňte počty možných výběrů:

Kuličky jsou: \ Kuliček v přihrádce:	nejvýše jedna	libovolně mnoho	alespoň jedna
různobarevné			
stejnobarevné			

Pozn.: Políčko vpravo nahoře se Vám podaří vyplnit nejspíše až když budete znát princip inkluze a exkluze.

Úloha 10:* Barevná inkoustová tiskárna dokáže umístit až 8 kapek na jeden bod. Kapka může mít azurovou (C-Cyan), fialovou (M-Magenta), žlutou (Y-Yellow) nebo černou (K-blacK) barvu. Kolik různých barevných odstínů lze dosáhnout v jednom bodě, předpokládáme-li, že smíšení tří různobarevných (CMY) kapek má stejný efekt, jako dvě černé? (Např. odstín 3C+2Y+M+K je stejný jako 2C+Y+3K.)

Úloha 11:* Kolik existuje různých rozdělení pravidelného n-úhelníku na trojúhelníky, tak že řezy vedou podél tětiv, které se vzájemně nekříží a navíc každý trojúhelník má alespoň jednu stranu společnou s n-úhelníkem?

Např. pětiúhelník *abcde* lze rozdělit na tři trojúhleníky *abc*, *acd* a *ade*.

Úloha 12: Kolik je v konvexním n-úhelníku dvojic tětiv, jež se navzájem protínají uvnitř n-úhelníku, tedy nikoli v krajních bodech?