Úlohy k cvičení

Výroková logika

Úloha 1: Doplňte tabulku pravdivostních hodnot

a	b	$\neg a$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \Rightarrow b$	$a \Leftrightarrow b$
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

Úloha 2: Pro libovolné výroky a, b jsou následující výroky ekvivalentní. Zdůvodněte pomocí tabulky pravdivostních hodnot a dobře si zapamatujte, při chápání důkazů se vám to bude hodit! (i) $a \Rightarrow b$, (ii) $\neg b \Rightarrow \neg a$ (iii) $\neg a \vee b$ (iv) $\neg(a \wedge \neg b)$.

Úloha 3: Řekněte bez použití implikace: Nebude-li pršet, nezmoknem. Kdo se bude snažit, dostane zápočet. Pokud je pes v boudě, není tam kočka. Pokud prší a je pod nulou vzniká náledí.

Úloha 4: Znegujte: Když prší, nevycházím z domu. Nebude-li pršet, nezmoknem. Zmokneme, právě když bude pršet.

Úloha 5: Zapište pomocí kvantifikátorů a znegujte: Všechna přirozená čísla jsou sudá. Každé prvočíslo je liché. Některé přirozené číslo je dělitelné všemi prvočísly. Mezi n a $2n$ vždy najdeme nějaké prvočíslo.

Matematická indukce

Princip matematické indukce: Chceme dokázat nějaké tvrzení kvantifikované přirozenými čísly, tedy chceme dokázat nějaký výrok $V(n)$ závisející na n přirozeném. Matematická indukce má následující dva kroky.

1. indukční krok. Dokážeme tvrzení pro počáteční hodnotu, tedy dokážeme $V(1)$.

2. indukční krok. Chceme dokázat $V(n)$, ale můžeme předpokládat, že výrok platí pro menší hodnoty, tedy platí $V(1), V(2), \ldots, V(n-1)$. Formálně řečeno tedy dokazujeme implikaci $V(1) \wedge V(2) \wedge \cdots \wedge V(n-1) \Rightarrow V(n)$ pro všechna přirozená $n \geq 2$.

Pokud jsme zvládli 1. i 2. indukční krok, můžeme odvodit, že výrok platí pro všechna přirozená n. Intuitivně to funguje tak, že díky 1. indukčnímu kroku platí $V(1)$. Pak díky implikaci $V(1) \Rightarrow V(2)$ odvodíme i $V(2)$. Když víme, že platí $V(1)$ i $V(2)$, tak z implikace $V(1) \wedge V(2) \Rightarrow V(3)$ v druhém indukčním kroku odvodíme $V(3)$. Následně stejným způsobem odvodíme $V(4)$, $V(5)$ atd. Odtud vidíme, že výrok platí pro všechna přirozená čísla. (Jen varuji, že toto zdůvodnění je pouze intuitivní. Při budování základů matematiky z axiomů se postupuje trochu jinak.)

Poznámky: Matematická indukce má různé variace. Často se Vám v konkrétních příkladech podaří dokázat implikaci $V(n-1) \Rightarrow V(n)$, ze které požadovaná implikace v druhém indukčním kroku plyne. (Bývá to tedy zjednodušení ale nefunguje to vždy, když je potřeba.) Občas se pomocí indukce nedokazuje tvrzení, které začíná od jedničky (tedy $V(1)$) ale třeba dvojky, trojky, nuly, nebo jen pro sudá čísla apod. Takové modifikace obvykle netvoří problém, pokud pochopíte základní princip.

Úloha 6: Dokažte matematickou indukcí:

(a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$,

(b) $\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2$,

(c) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$,

(d) $\prod_{i=2}^{n} \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}$.

Úloha 7: Dokažte matematickou indukcí, že $4|(6n^2 + 2n)$ pro každé n přirozené. (Slovy: 4 je dělitelem výrazu $6n^2 + 2n$.)

Úloha 8: Kde je chyba v následujícím důkazu (nepravdivého) tvrzení, že $5^n = 1$ pro všechna přirozená n: Je zřejmé, že pro $n = 0$ tvrzení platí. Nyní předpokládejme, že tvrzení platí pro všechna celá čísla m, kde $0 \leq m \leq k$ a dokazujeme ho pro $k+1$. Máme

$$5^{k+1} = \frac{5^k \cdot 5^k}{5^{k-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1.$$

Úloha 9: Dokažte, že pro Fibonacciho posloupnost danou předpisem $F_1 = F_2 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 3$ platí:

(a) $F_n \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$,

(b) $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$,

(c) $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$

*Úloha 10**:* Dokažte, že každé přirozené číslo n lze jednoznačně napsat jako součet různých Fibonacciho čísel počínaje F_2 takových, že v součtu nejsou žádná dvě po sobě jdoucí Fibonacciho čísla.

Formálně: n lze jednoznačně napsat ve tvaru $n = \sum_{j=1}^{k} F_{i_j}$, kde $i_1 \geq 2$ a $i_j \geq i_{j-1} + 2$ pro $j \in \{2, \ldots, k\}$.

Úloha 11:* Je dáno reálné číslo x takové, že $x + \frac{1}{x}$ je celé. Dokažte, že pro každé přirozené n je i číslo $x^n + \frac{1}{x^n}$ celé.

Úloha 12:* Na šachovnici $2^n \times 2^n$ jedno libovolně vybrané políčko chybí. Ukažte, že zbylou plochu lze vydláždit dlaždicemi, která mají tvar “L” a přitom zabírají tři políčka.