

14 The best of Algebra 2024

Zadání

Cvičení 22. a 23. května, verze ze dne 21. května 2024.

Cíle cvičení: Semestr zakončíme hitparádou největších početních zážitků letošního kurzu algebry, které si chceme, můžeme a musíme zopakovat.

Úlohy, které si chceme znovu vyřešit:

Úloha 14.1. Najděte nějaké celočíselné řešení rovnice $1023x + 96y = 18$.

Úloha 14.2. Dělte se zbytkem polynomy $x^n - 1$ a $x^m - 1$ v oboru $\mathbb{Z}[x]$.

Úloha 14.3. Najděte největší společné dělitele $\text{NSD}(3 + 4i, 7 + 2i)$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$.

Úloha 14.4. Rozmyslete si, proč je polynom $\frac{10}{17}x^8 + 5x^6 + \frac{9}{2}x^5 - 12x^4 + \frac{4}{3}x - 6$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Q}[x]$.

Úloha 14.5. Zkonstruujte kořenové nadtěleso polynomu $x^3 + x + 1$ nad \mathbb{Z}_2 . Uvědomte si, že je těleso dokonce rozkladové a polynom nad ním rozložte na lineární členy.

Úloha 14.6. Dokažte, že jsou izomorfní tělesa $\mathbb{Q}[\alpha]/(\alpha^3 - 2)$ a $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

Úloha 14.7. Najděte všechny generátory cyklické grupy \mathbb{Z}_7^* .

Úloha 14.8. Jaké jsou možné faktorgrupy grupy \mathbf{S}_3 ?

Úloha 14.9. Spočítejte stupeň rozšíření $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$.

Úloha 14.10. Spočítejte Galoisovu grupu $\text{Gal}(U/\mathbb{Q})$, je-li U rozkladové nadtěleso polynomu $x^4 - 2$.

A na úplný závěr kontrolní otázka

Úloha 14.11. Který z příkladů se v zadání žádného cvičení nevyskytoval?