SAMOOPRAVNÉ KÓDY

Obsah

Motivace a obsah kurzu

Úkolem teorie kódování je vytvořit matematický model úlohy:

> *Efektivně a bez ztrát přenést informaci informačním kanálen od zdroje informace k příjemci.*

Zatímco otázkou měření obsahu informace a jeho ztráty se zabývá teorie informace, my se budeme zabývat „strukturu", která informaci nese (kódu - textu, případně jeho kódování) bez ohledu na „obsah".

Konkretizace položek úkolu:

informační kanál - fyzikální prostředí, u nějž nás zajímá míra jeho (ne)spolehlivosti

zdroj/příjemce - strany komunikace (2 lidé, 2 stroje, vysílač přijímač apod.)

bezztrátovost - informace zdroje a příjemce by měla být „stejná"

efektivita - snaha o maximalizaci míry informace vzhledem k velikosti struktury, která informaci "nese"

Date: 14. dubna 2022.

Rozvrh kurzu

(1) základní koncepty teorie kódů (vzdálenost, nosnost, linearita, dualita)
(2) algebraické konstrukce (konečná tělesa a polynomy nad nimi, cyklické kódy, (G)RS, BCH kódy)
(3) kombinatorické a geometrické konstrukce (Golayovy kódy, RM kódy),
(4) úvod do konvolučních kódů.

1. Vzdálenost a nosnost blokového kódu

Celou přednášku předpokládáme, že $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}$ je abeceda znaků zdroje i příjemce pro $\mathbb{F}$ konečné těleso řádu $q = |\mathbb{F}|$.

T&N. Pro $n \in \mathbb{N}$ budeme vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ nazývat *slovo* délky n a v souřadnicích ho budeme zapisovat řádkově $\mathbf{v} = v_1 v_2 \dots v_n$.

Množina $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ se nazývá *blokový kód délky* n

Definice. Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ a $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ je neprázdná množina slov. Pak

- $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\{i \mid u_i \neq v_i\}|$ se nazývá *(Hammingova) vzdálenost* slov $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$,
- položme $d(\mathcal{C}) = \min\{d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mid \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{C}, \mathbf{u} \neq \mathbf{v}\}$ pro $|\mathcal{C}| > 1$ a $d(\mathcal{C}) = n+1$ pro $|\mathcal{C}| = 1$, pak $d(\mathcal{C})$ nazveme *(Hammingova) vzdálenost* kódu $\mathcal{C}$,
- $w(\mathbf{u}) = d(\mathbf{u}, \mathbf{0})$ se nazývá *(Hammingova) váha* slova $\mathbf{u}$.

Poznámka 1.1. Jestliže $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ pak

(1) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ pro každé $\mathbf{w} \in \mathbb{F}^n$
(2) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = w(\mathbf{u} - \mathbf{v})$

Důkaz. (1) Označme $D(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \{i \mid u_i \neq v_i\}$, pak

$$D(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \subseteq D(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \cup D(\mathbf{w}, \mathbf{v})$$

proto

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |D(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq |D(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \cup D(\mathbf{w}, \mathbf{v})| \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v}).$$

(2) Stačí uvážit, že $u_i \neq v_i \Leftrightarrow u_i - v_i \neq 0$. □

T&N. Jestliže $\mathbf{u} \in \mathbb{F}_q^n$ a r je nezáporné celé číslo, pak

$$S(\mathbf{u}, r) := \{\mathbf{v} \in \mathbb{F}_q^n \mid d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq r\}$$

je q-ární koule o poloměru r se středem $\mathbf{u}$.

Velikost koule v prostoru $\mathbb{F}_q^n$ se značí $V_q(n, r) = |S(\mathbf{0}, r)|$.

Pozorování. Jestliže $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ a $r \in \mathbb{N}$ pak

(1) $S(\mathbf{u}, r) = \mathbf{u} + S(\mathbf{0}, r) = \mathbf{u} - \mathbf{v} + S(\mathbf{v}, r)$,
(2) $|S(\mathbf{u}, r)| = |S(\mathbf{0}, r)| = |S(\mathbf{v}, r)|$.

T&N. Je-li r nezáporné celé číslo, pak o kódu $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ řekneme, že

- *rozpozná* r chyb, pokud $S(\mathbf{u}, r) \cap \mathcal{C} = \{\mathbf{u}\}$ pro každé $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$,
- *opraví* r chyb, pokud $S(\mathbf{u}, r) \cap S(\mathbf{v}, r) = \emptyset$ pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$.

Poznámka 1.2. Je-li $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ je aspoň dvouprvkový kód a $r \in \mathbb{N}$ pak

(1) $\mathcal{C}$ rozpozná r chyb $\Leftrightarrow d(\mathcal{C}) > r$,
(2) $\mathcal{C}$ opraví r chyb $\Leftrightarrow d(\mathcal{C}) > 2r$,

Důkaz. (1) $d(\mathcal{C}) > r \Leftrightarrow \forall \mathbf{u} \neq \mathbf{v} \in \mathcal{C}$ platí, že $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) > r \Leftrightarrow \forall \mathbf{u} \in \mathcal{C} : S(\mathbf{u}, r) \cap \mathcal{C} = \{\mathbf{u}\}$.
(2) Dokážeme nepřímo.
($\Rightarrow$) Nechť $d \leq 2r$. Pak $\exists \mathbf{u} \neq \mathbf{v} \in \mathcal{C}$ splňující $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq 2r \Rightarrow$ pro $D := \{i \mid u_i \neq v_i\}$ dostáváme $|D| \leq 2r \Rightarrow \exists B \subset D$, pro něž $|B| \leq r$ a $|D \setminus B| \leq r$. Definujme slovo $\mathbf{w}$:

$$w_i = \begin{cases} u_i & \text{pro } i \in B \\ v_i & \text{pro } i \in D \setminus B \\ u_i = v_i & \text{jinde} \end{cases}$$

Pak $d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \leq r$ a $d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \leq r$, proto $\mathbf{w} \in S(\mathbf{u}, r) \cap S(\mathbf{v}, r)$.
($\Leftarrow$) Nechť $\exists \mathbf{u} \neq \mathbf{v} \in \mathcal{C}$ a $\exists \mathbf{w} \in \mathbb{F}^n$ splňující $\mathbf{w} \in S(\mathbf{u}, r) \cap S(\mathbf{v}, r)$. Pak

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \leq 2r$$

díky 1.1(1). □

Pozorování. Pokud kód $\mathcal{C}$ opraví r chyb, $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{v} \in S(\mathbf{u}, r)$, pak $S(\mathbf{v}, r) \cap \mathcal{C} = \{\mathbf{u}\}$

Předchozí úvaha vede k opravovacímu algoritmu metodou nejbližšího slova: je-li $\mathbf{v}$ přijaté slovo, zvolíme takové $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$, pro něž $S(\mathbf{v}, r) \cap \mathcal{C} = \{\mathbf{u}\}$. Je-li pravděpodobnost bezchybného příjetí (q-árního) bitu větší než pravděpodobnost bitové chyby, víme z teorie informace, že se jedná o ML dekódovací schéma.

Věta 1.3 (Hammingova nerovnost)**.** Nechť $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ je aspoň dvouprvkový kód, který opraví r chyb. Pak $2r < d(\mathcal{C})$ a pro $k = \log_q |\mathcal{C}|$ platí, že $V_q(n, r) \leq q^{n-k}$.

Důkaz. 1.2 $\Rightarrow 2r < d(\mathcal{C}) \Rightarrow \{S(\mathbf{u}, r) \mid \mathbf{u} \in \mathcal{C}\}$ je disjunktní systém podmnožin $\mathbb{F}^n$

$$\Rightarrow \quad V_q(n, r)|\mathcal{C}| = \sum_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} |S(\mathbf{u}, r)| = |\dot{\bigcup}_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} S(\mathbf{u}, r)| \leq |\mathbb{F}^n| = q^n.$$

Tudíž $V_q(n, r) \leq \frac{q^n}{q^k} = q^{n-k}$. □

Definice. Nechť $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$, $k = \log_q |\mathcal{C}|$ a r je nezáporné celé číslo. Číslo $\frac{k}{n}$ se nazývá *nosnost* (nebo také informační poměr) kódu

Kód $\mathcal{C}$ je *r-perfektní*, jestliže opraví r chyb a $V_q(n, r) = q^{n-k}$, $\mathcal{C}$ je *perfektní*, jestliže existuje r, pro něž je r-perfektní.

Pozorování. Nechť $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$, $k = \log_q |\mathcal{C}| > 0$ a r je nezáporné celé číslo.

(1) $\frac{k}{n} \in (0, 1\rangle$ a $k = n \Leftrightarrow \mathcal{C} = \mathbb{F}_q^n$,
(2) $\mathcal{C}$ je r-perfektní $\Leftrightarrow \mathbb{F}_q^n = \dot{\bigcup}_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}} S(\mathbf{u}, r)$,
(3) pro $r > 0$ je perfektní kód r-perfektní pro (jediné) $r = \frac{d(\mathcal{C})-1}{2}$.

Příklad 1.4. (1) $\mathbb{F}^n$ je 0-perfektní kód,
(2) $\{\mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{F}^n$ je n-perfektní kód.

Věta 1.5 (Singletonův odhad)**.** Jestliže $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$, $\mathcal{C} \neq \emptyset$ a $k = \log_q |\mathcal{C}|$, pak $d(\mathcal{C}) \leq n - k + 1$.

Důkaz. Nechť $A(n,d) := \max\{\log_q |\mathcal{C}| \mid \mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n, d(\mathcal{C}) \geq d\}$. Pak pro každé $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ splňující $d = d(\mathcal{C})$ platí, že $k \leq A(n,d)$.

Dokazujme indukcí dle $d \geq 1$ tvrzení $\forall n\ A(n,d) \leq n - d + 1$.

Protože $A(n,1) \leq A(n,d) \leq n$, vidíme, že tvrzení pro $d = 1$ platí.

Za platnosti tvrzení pro $d-1$ dokážeme tvrzení pro $d \geq 2$. Pro libovolný kód $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ splňující $d(\mathcal{C}) \geq d$ definujme kód

$$\overline{\mathcal{C}} := \{v_1 \dots v_{n-1} \in \mathbb{F}_q^{n-1} \mid \exists v_n :\ v_1 \dots v_{n-1} v_n \in \mathcal{C}\}.$$

Pak $|\overline{\mathcal{C}}| = |\mathcal{C}|$ protože $d \geq 2$ a dále $d(\overline{\mathcal{C}}) \geq d - 1$, proto díky indukčnímu předpokladu

$$A(n,d) \leq A(n-1,d-1) \leq (n-1) - (d-1) + 1 = n - d + 1 \Rightarrow$$
$$k \leq A(n, d(\mathcal{C})) \leq n - d(\mathcal{C}) + 1 \quad \Rightarrow \quad d(\mathcal{C}) \leq n - k + 1.$$

□

Definice. Nechť $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$, $k = \log_q |\mathcal{C}|$ a $d = d(\mathcal{C})$. $\mathcal{C}$ se nazývá *MDS* (maximum distance separable), jestliže $d = n - k + 1$.

Příklad 1.6. (1) $\mathbb{F}^n$ i $\{\mathbf{0}\}$ jsou MDS i perfektní kódy.

(2) Pro $n \geq 2$ je tzv. paritní kód $\mathcal{C} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{F}_2^n \mid \sum_i v_i = 0\}$ MDS, neboť $d(\mathcal{C}) = 2$ a $k = n - 1$, ovšem nejedná se o perfektní kód.

Algebraické konstrukce

2. Lineární kódy

Definice. $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ se nazývá *lineární kód*, jde-li o podprostor vektorového prostoru $\mathbb{F}^n$ nad tělesem $\mathbb{F}$.

Pozorování. Pro lineární kód $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ je $k = \log_q |\mathcal{C}| = \dim_{\mathbb{F}_q}(\mathcal{C})$, tedy nosnost $\mathcal{C}$ je rovna $\frac{\dim(\mathcal{C})}{n}$.

T&N. Je-li $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ lineární kód délky n nad tělesem $\mathbb{F}_q$, $k = \dim_{\mathbb{F}_q}(\mathcal{C})$ a $d = d(\mathcal{C})$, pak ho označujeme jako kód s parametry

$$[n,k],\ [n,k,d],\ [n,k]_q,\ [n,k,d]_q.$$

Pozorování. Je-li $\mathcal{C}$ lineární kód kladné dimenze, pak

$$d(\mathcal{C}) = \min\{d(\mathbf{u},\mathbf{v}) \mid \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{C}, \mathbf{u} \neq \mathbf{v}\} = \min\{w(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in \mathcal{C} \setminus \{\mathbf{0}\}\}.$$

T&N. Buď $\mathcal{C}$ $[n,k]$-kód a $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \mathbf{c}_k \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{k \times n}$ a $\mathbf{H} \in \mathbb{F}^{(n-k)\times n}$, pak $\mathbf{C}$ je *generující* matice kódu $\mathcal{C}$, jestliže $c_1, \dots, c_k$ je báze $\mathbf{C}$, a a $\mathbf{H}$ *kontrolní* matice kódu $\mathcal{C}$, pokud $\mathcal{C} = \operatorname{Ker} \mathbf{H}$.

Pozorování. Nechť $\mathbf{C} \in \mathbb{F}^{k\times n}$, $\mathbf{H} \in \mathbb{F}^{(n-k)\times n}$ a $\mathcal{C}$ je $[n,k]$-kód.

(1) Buď $\mathbf{C}$ generující matice $\mathcal{C}$. Pak $\mathbf{H}$ je kontrolní matice kódu $\mathcal{C}$, právě když řádky $\mathbf{H}$ tvoří bázi řešení soustavy $\mathbf{C}\mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$.

(2) Buď $\mathbf{H}$ kontrolní matice $\mathcal{C}$. Pak $\mathbf{C}$ je generující matice kódu $\mathcal{C}$, právě když řádky $\mathbf{C}$ tvoří bázi řešení soustavy $\mathbf{H}\mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$
(3) $\mathbf{C}$ a $\mathbf{H}$ jsou generující a kontrolní matice kódu $\mathcal{C}$, právě když rank $\mathbf{C} = k$, rank $\mathbf{H} = n - k$, $\mathbf{C}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$ a $\mathcal{C} = \text{Im } \mathbf{C}^T = \text{Ker } \mathbf{H}$.

T&N. Pro (blokové) kódy $\mathcal{C}, \overline{\mathcal{C}} \subseteq \mathbb{F}^n$ a permutaci $\sigma \in S_n$ označme $\mathcal{C} \sim_\sigma \overline{\mathcal{C}}$, pokud $c_1 \dots c_n \in \mathcal{C} \Leftrightarrow c_{\sigma(1)} \dots c_{\sigma(n)} \in \overline{\mathcal{C}}$. Řekneme, že jsou kódy $\mathcal{C}$ a $\overline{\mathcal{C}}$ *permutačně ekvivalentní* jestliže existuje $\sigma \in S_n$, pro niž $\mathcal{C} \sim_\sigma \overline{\mathcal{C}}$

Pozorování. Nechť $\sigma \in S_n$, kódy $\mathcal{C}, \overline{\mathcal{C}} \subseteq \mathbb{F}^n$ jsou permutačně ekvivalentní prostřednictvím σ a definujme $\varphi_\sigma : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ předpisem $\varphi_\sigma(v) = v_{\sigma(1)} \dots v_{\sigma(n)}$. Pak

(1) $\varphi_\sigma : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ je izomorfismus, $\overline{\mathcal{C}} = \varphi_\sigma(\mathcal{C})$ a $|\mathcal{C}| = |\overline{\mathcal{C}}|$,
(2) pro $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ máme $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\varphi_\sigma(\mathbf{u}), \varphi_\sigma(\mathbf{v}))$ a proto $d(\mathcal{C}) = d(\overline{\mathcal{C}})$,
(3) permutační ekvivalence tvoří ekvivalenci na kódech obsažených v $\mathbb{F}^n$.

T&N. Generující matice lineárního kódu je ve *standardním tvaru*, má-li formu $(\mathbf{I}_k|\mathbf{A}) \in \mathbb{F}^{k\times n}$.

Poznámka 2.1. Je-li $\mathcal{C}$ lineární kód, pak existuje generující matice ve standardním tvaru nějakého kódu, který je permutačně ekvivalentní k $\mathcal{C}$.

Důkaz. Nechť $\mathbf{C}$ je generující matice $[n, k]$-kódu $\mathcal{C}$. Posloupností elementárních úprav (Gaussovou-Jordanovou eliminací) najdeme podobnou, tedy rovněž generující matici $\mathbf{D} = (\mathbf{d}_1^T| \dots |\mathbf{d}_n^T) \sim \mathbf{C}$ s bázovými sloupci $\mathbf{d}_{i_1}^T = \mathbf{e}_1^T, \dots, \mathbf{d}_{i_k}^T = \mathbf{e}_k^T$ tvořící kanonickou bázi prostoru $\mathbb{F}^k$. Vezmeme-li libovolnou permutaci $\sigma \in S_n$ splňující $\sigma(j) = i_j$, pak

$$\tilde{\mathbf{D}} = (\mathbf{d}_{\sigma(1)}^T|\mathbf{d}_{\sigma(2)}^T| \dots \mathbf{d}_{\sigma(k)}^T \dots |\mathbf{d}_{\sigma(n)}^T) = (\mathbf{I}_k|\mathbf{d}_{\sigma(k+1)}^T \dots |\mathbf{d}_{\sigma(n)}^T)$$

$\tilde{\mathbf{D}}$ je generující matice kódu, s nímž je permutačně ekvivalentní prostřednictvím permutace σ kód $\mathcal{C}$. □

Poznámka 2.2. Je-li $(\mathbf{I}_k|\mathbf{A}) \in \mathbb{F}^{k\times n}$ generující matice $[n, k]$-kódu, pak $(-\mathbf{A}^T|\mathbf{I}_{n-k})$ je jeho kontrolní matice.

Důkaz. Zřejmě $\text{rank}((-\mathbf{A}^T|\mathbf{I}_{n-k})) = n - k$ a

$$(-\mathbf{A}^T|\mathbf{I}_{n-k}) \cdot (\mathbf{I}_k|\mathbf{A})^T = \left(-\mathbf{A}^T|\mathbf{I}_{n-k}\right) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k \\ \mathbf{A}^T \end{pmatrix} = -\mathbf{A}^T + \mathbf{A}^T = \mathbf{0}$$

□

Věta 2.3. Je-li $\mathcal{C}$ $[n, k, d]$-kód s kontrolní maticí $\mathbf{H}$ a r je největší hodnota, pro niž je každých r sloupců $\mathbf{H}$ lineárně nezávislých, pak $d = r + 1$.

Důkaz. $r = 0 \Leftrightarrow \exists i$, pro něž je i-tý sloupec $\mathbf{H}$ nulový $\Leftrightarrow \exists i$, pro něž $\mathbf{H}\mathbf{e}_i^T = \mathbf{0}^T \Leftrightarrow \exists i : \mathbf{e}_i \in \mathcal{C} \Leftrightarrow d(\mathcal{C}) = 1$.

Všimněme si, že $r = n$, právě když $\mathbf{H}$ je regulární čtvercová matice, právě když $d(\mathcal{C}) = d(\{\mathbf{0}\}) = n + 1$.

Nechť $r < n$ a $d(\mathcal{C}) = d$, $\Rightarrow \exists \mathbf{u} \in \mathcal{C} : w(\mathbf{u}) = d$, tj. $\mathbf{H}\mathbf{u}^T = \mathbf{0}^T \Rightarrow$ d sloupců $\mathbf{H}$ je LZ $\Rightarrow r \leq d - 1$.

Nechť naopak $\exists \mathbf{v}$ $w(\mathbf{v}) = r + 1$ a $\mathbf{H}\mathbf{v}^T = \mathbf{0}^T \Rightarrow \mathbf{v} \in \mathcal{C} \Rightarrow d \leq w(\mathbf{v}) = r + 1$. □

Příklad 2.4 (Hammingův perfektní kód délky 7)**.** Definujme binární kód $\mathcal{H}$ s kontrolní maticí $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Spočítáme $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ generující matici ve standardním tvaru. Protože jsou každé dva sloupce $\mathbf{H}$ různé, jsou nad $\mathbb{F}_2$ lineárně nezávislé a například první tři sloupce $\mathbf{H}$ už jsou lineárně závislé, proto je podle Věty 2.3 $d(\mathcal{H}) = 3$ a kód podle 1.2 opraví jednu chybu. Snadno spočítáme $V_2(7,1) = 1 + \binom{7}{1} = 8 = 2^{7-4}$, tedy se jedná o 1-perfektní kód, který zřejmě není MDS.

T&N. Bilineární forma $\cdot : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ daná vztahem $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ se nazývá *bodový součin*. Pro $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ se $\mathcal{C}^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{0} \forall \mathbf{d} \in \mathcal{C}\}$ nazývá *duální kód* ke kódu $\mathcal{C}$.

Pozorování. Nechť $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq \mathbb{F}^n$.

(1) bodový součin $\cdot$ je symetrická, nedegenerovaní (tj. regulární) bilineární forma,
(2) $\mathcal{C}^\perp = (\mathrm{LO}\ \mathcal{C})^\perp \subseteq \mathbb{F}^n$ je lineární kód,
(3) $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{LO}\ \mathcal{C} = (\mathcal{C}^\perp)^\perp$,
(4) je-li $\mathcal{C}$ lineární, pak $\mathcal{C} = (\mathcal{C}^\perp)^\perp$,
(5) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D}^\perp \subseteq \mathcal{C}^\perp$.

Poznámka 2.5. Buď $\mathcal{C}$ $[n,k]$-kód, $\mathbf{C} \in \mathbb{F}^{k \times n}$ a $\mathbf{H} \in \mathbb{F}^{(n-k) \times n}$.

(1) $\mathcal{C}^\perp$ je $[n, n-k]$-kód,
(2) $\mathbf{C}$ je generující matice $\mathcal{C}$, $\Leftrightarrow$ $\mathbf{C}$ je kontrolní matice $\mathcal{C}^\perp$,
(3) $\mathbf{H}$ je kontrolní matice $\mathcal{C}$, $\Leftrightarrow$ $\mathbf{H}$ je generujíc matice $\mathcal{C}^\perp$.

Důkaz. Nechť $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \mathbf{c}_k \end{pmatrix}$ a $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \mathbf{h}_{n-k} \end{pmatrix}$.

(1) Nechť $\mathbf{C}$ je generující matice $\mathcal{C}$, tj. rank $\mathbf{C} = k$ a $\mathcal{C}^\perp = (\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k)^\perp = \mathrm{Ker}\ \mathbf{C} \Rightarrow \dim \mathcal{C}^\perp = n - \mathrm{rank}\ \mathbf{C} = n - k$.

(2),(3) Je-li $\mathbf{C}$ je generující matice $\mathcal{C}$, pak Ker $\mathbf{C} = \mathcal{C}^\perp \Rightarrow \mathbf{C}$ je kontrolní matice $\mathcal{C}^\perp$. Proto, je-li $\mathbf{H}$ je generující matice $\mathcal{C}^\perp$, pak $\mathbf{C}$ je kontrolní matice $(\mathcal{C}^\perp)^\perp = \mathcal{C}$.

Naopak, je-li $\mathbf{H}$ je kontrolní matice $\mathcal{C}$, potom $\mathcal{C} = \mathrm{Ker}\ \mathbf{H} = (\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_{n-k})^\perp \in \mathbb{F}$, proto

$$\mathcal{C}^\perp = ((\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_{n-k})^\perp)^\perp = LO(\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_{n-k}),$$

tudíž $\mathbf{H}$ je generujíc matice $\mathcal{C}^\perp$. Proto, je-li $\mathbf{C}$ je kontrolní matice $\mathcal{C}^\perp$, pak je $\mathbf{C}$ je generující matice $(\mathcal{C}^\perp)^\perp = \mathcal{C}$. □

3. MDS-kódy

Připomeňme, že $[n,k,d]$-kód je MDS, právě když $d = n - k + 1$.

Poznámka 3.1. Buď $\mathcal{C}$ $[n,k,d]$-kód s kontrolní maticí $\mathbf{H}$. Pak je ekvivalentní:

(1) $\mathcal{C}$ je MDS,
(2) každých $n-k$ sloupců $\mathbf{H}$ je lineárně nezávislých,

(3) každá čtvercová matice, která vznikne z $\mathbf{H}$ vypuštěním k sloupců je regulární.

Důkaz. (1)⇒(2) $\mathcal{C}$ je MDS znamená, že $d-1=n-k$, proto (2) plyne z 2.3.
(2)⇒(1) Z 1.5 plyne, že $d \leq n-k+1$ a z 2.3 plyne, že $d \geq n-k+1 \Rightarrow \mathcal{C}$ je MDS.
(2)⇔(3) To víme z lineární algebry. □

Pozorování. Buď $\mathcal{C}$ $[n,k]$-kód s generující maticí $\mathbf{C}$. Pak $\mathcal{C}^\perp$ je MDS ⇔ každá čtvercová matice, která vznikne z $\mathbf{C}$ vypuštěním $n-k$ sloupců je regulární.

Věta 3.2. Lineární kód $\mathcal{C}$ je MDS, právě když $\mathcal{C}^\perp$ je MDS.

Důkaz. Protože $\mathcal{C}=(\mathcal{C}^\perp)^\perp$, stačí dokázat jen implikaci (⇐). Dokažme ji nepřímo, tedy předpokládejme, že $\mathcal{C}$ je $[n,k,d]$-kód, který není MDS.

Pak $d=d(\mathcal{C})<n-k+1 \Rightarrow d \leq n-k \Rightarrow \exists \mathbf{v} \in \mathcal{C}$ tak, že $0<w(\mathbf{v}) \leq n-k \Rightarrow |\{i \mid v_i=0\}| \geq k$. Víme, že existuje báze $\mathcal{C}$ obsahující vektor $\mathbf{v}$, tedy existuje generující matice $\mathbf{C}$, jejíž první řádek tvoří slovo $\mathbf{v}$. Podle 2.5 je $\mathbf{C}$ kontrolní maticí kódu $\mathcal{C}^\perp$, jejíž k sloupců má první souřadnici nulovou. Protože jsou tyto sloupce lineárně závislé, podle 3.1 není $\mathcal{C}^\perp$ MDS. □

Důsledek 3.3. Buď $\mathbf{C}$ generující matice $[n,k]$-kódu $\mathcal{C}$. Pak $\mathcal{C}$ je MDS, právě když je každých k sloupců $\mathbf{C}$ lineárně nezávislých.

Jaký je vztah mezi existencí lineárních MDS-kódů a velikostí tělesa $\mathbb{F}$?

Pozorování. Nechť $i<j \leq n$, $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$, $b_i \neq 0 \neq b_j$, Jestliže $\frac{a_i}{b_i}=\frac{a_j}{b_j}$, pak je množina vektorů $\{\mathbf{e}_k \in \mathbb{F}^n \mid k : i \neq k \neq j\} \cup \{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$ lineárně závislá, neboť se jedná o řádkové vektory matice $\mathbf{I}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$, kterou dostaneme z jednotkové nahrazením i-tého řádku slovem $\mathbf{a}$ a j-tého řádku slovem $\mathbf{b}$ a jejíž determinant je $\det \mathbf{I}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}=a_ib_j-a_jb_i=0$.

Věta 3.4. Jestliže je $[n,k,d]_q$-kód MDS a $3 \leq d \leq n-1$, pak $n-q<k<q$ a $d \leq q$.

Důkaz. Nechť $\mathcal{C}$ je $[n,k,d]_q$-kód, který je MDS, tedy $d=n-k+1$. Pak podle 3.2 je $\mathcal{C}^\perp$ MDS $[n,n-k,d']_q$-kód, kde $d'=n-(n-k)+1=k+1=n-d+2 \Rightarrow d=n-d'+2$ a $d'=n-d+2$. Dosadíme-li vyjádření d do předpokladu $3 \leq d \leq n-1$ dostáváme

$$3 \leq n-d'+2 \leq n-1 \Rightarrow 1-n \leq -d' \leq -3 \Rightarrow 3 \leq d' \leq n-1,$$

tj. pro d i d' platí stejný předpoklad.

Díky 2.1 můžeme BÚNO předpokládat, že existuje generující matice kódu $\mathcal{C}$ ve standardním tvaru $(\mathbf{I}_k|\mathbf{A})$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{F}_q^{k \times n-k}$. Protože $d \geq 3$, máme $n-k=d-1 \geq 2$, tedy $\mathbf{A}$ má aspoň dva sloupce.

Uvědomme si, že všechny hodnoty $\mathbf{A}$ jsou nenulové. Kdyby $a_{ij}=0$, pak by j-tý sloupec matice $\mathbf{A}$ byl lineární kombinací prvních k sloupců matice $(\mathbf{I}_k|\mathbf{A})$ s výjimkou i-tého, což je ve sporu s 3.3. Protože jsou podle 3.3 první dva sloupce matice $\mathbf{A}$ a každých $k-2$ sloupců jednotkové matice lineárně nezávislé, plyne z předchozího pozorování, že $\forall i \neq j$ $\frac{a_{i1}}{a_{i2}} \neq \frac{a_{j1}}{a_{j2}}$, tedy

$$k=|\{\frac{a_{i1}}{a_{i2}} \in \mathbb{F}_q^* \mid i=1,\ldots,k\}| \leq q-1 \Rightarrow k<q$$

a duálně pro MDS kód $\mathcal{C}^\perp$ je $n-k<q$, a proto $k>n-q$. Odtud konečně plyne $d=n+1-k \leq q$. □

Příklad 3.5. Dvouprvkový kód $\{\mathbf{0}, 1 \dots 1\}$ je pro $k > 1$ a $n > 2$ jediný lineární kód s parametry $[n, k, n-k+1]_2$, který opraví aspoň 1 chybu, tedy $d \geq 3$. Kdyby $d < n$, pak bychom z 3.4 plynulo, že $3 \leq d \leq q = 2$, tedy spor.

Příklad 3.6. Nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}_q^*$ jsou po dvou různé prvky, $k < n$, položme $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, dále $\mathbf{H}_{k,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \dots & \alpha_n^{k-1} \end{pmatrix}$ a $\mathcal{C}_{k,\alpha} = \ker \mathbf{H}_{k,\alpha}$. Potom tvoří každých k sloupců této matice regulární podmatici a proto jsou $\mathcal{C}_{k,\alpha}$ i $\mathcal{C}_{k,\alpha}^\perp$ MDS-kódy.

Definice. Kód $\mathcal{C}$ se nazývá *samoortogonální*, pokud $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^\perp$ a $\mathcal{C}$ je *samoduální*, pokud $\mathcal{C} = \mathcal{C}^\perp$.

Pozorování. Samoduální kód je vždy lineární.

Pozorování. Je-li $\mathbf{C}$ generující matice $[n, k]$-kódu $\mathcal{C}$, pak

(1) $\mathcal{C}$ je samoortogonální $\Leftrightarrow \mathbf{C}\mathbf{C}^T = \mathbf{0}$,
(2) $\mathcal{C}$ je samoduální $\Leftrightarrow \mathbf{C}\mathbf{C}^T = \mathbf{0}$ a $n = 2k \Leftrightarrow \mathbf{C}$ je kontrolní matice $\mathcal{C}$.

T&N. Nechť $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ a $I = \{i_1, \dots, i_r\}$. Označme $\pi_I : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^{n-r}$ zobrazení, kde $\pi_I(\mathbf{u})$ vznikne z $\mathbf{u}$ vynecháním všech souřadnic $i_1, \dots, i_r$ a $\pi_i = \pi_{\{i\}}$. Zobrazení π_I se nazývá *propíchnutí* a $\pi_I(\mathcal{C})$ je pro každé $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ *propíchnutý* kód v souřadnicích I.

Pozorování. Nechť $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ a $I = \{i_1, \dots, i_r\}$.

(1) $\pi_I = \pi_{i_1} \dots \pi_{i_r}$ je lineární zobrazení,
(2) propíchnutý kód lineárního kódu je lineární,
(3) je-li $\mathcal{C}$ $[n, k, d]$-kód pro $d > 1$ a $i \in \{1, \dots, n\}$, pak $\pi_i(\mathcal{C})$ je buď $[n-1, k, d]$-kód nebo $[n-1, k, d-1]$-kód.

Příklad 3.7. Binární lineární kód $\mathcal{C}$ s generující i kontrolní maticí $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ je generující i kontrolní matice kódu $\mathcal{C}$ nad $\mathbb{F}_2$, protože $\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \mathbf{0}$, rank $\mathbf{C} = 3$. Protože $\mathcal{C} = \mathcal{C}^\perp$, je to samoduální $[6, 3, 2]_2$-kód. Propíchnutý kód $\pi_i(\mathcal{C})$ má parametry $[5, 3, 1]_2$ a není ani samoortogonální (a tedy ani samoduální).

$\pi_{\{5,6\}}(\mathcal{C})$ je opět samoduální $[4, 2, 2]_2$-kód s generující maticí $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Poznámka 3.8. Buď $\mathcal{C}$ $[n, k, n-k+1]$-kód (tedy MDS-kód), $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ a $r := |I| \leq n - k$. Pak $\pi_I(\mathcal{C})$ je MDS $[n-r, k, n-r-k+1]$-kód.

Důkaz. Nechť $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \dots \\ \mathbf{c}_k \end{pmatrix}$ je generující matice kódu $\mathcal{C}$. Potom z 3.3 plyne, že každých k sloupců je lineárně nezávislých.

Protože $r = |I| \leq n - k$, máme $k \leq n - r$, proto $\begin{pmatrix} \pi_I(\mathbf{c}_1) \\ \dots \\ \pi_I(\mathbf{c}_k) \end{pmatrix}$ je generující matice kódu $\pi_I(\mathcal{C})$, jejíchž každých k sloupců je lineárně nezávislých $\Rightarrow$ $\pi_I(\mathcal{C})$ je MDS díky 3.3 $\Rightarrow$ $\pi_I(\mathcal{C})$ je $[n-r, k, n-r-k+1]$-kód. □

Příklad 3.9. Je-li $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ generující matice $[8, 4]_2$-kódu $\mathcal{C}$ ve standardním tvaru, vidíme, že $\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \mathbf{0}$, jde o samoduální kód. Protože žádný sloupec matice $\mathbf{C}$ není nulový, každé dva jsou různé, součet každých tří má lichou váhu, tedy není nula a součet prvních tří sloupců dá právě pátý sloupec, dává nám 2.3, že $d(\mathcal{C}) = 4$, proto jde o $[8, 4, 4]_2$-kód.

Všimněme si, že propíchnutí $\pi_8(\mathcal{C})$ je právě Hammingův 1-perfektní $[7, 4, 3]_2$-kód z 2.4 s generující maticí $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Polynomy nad konečnými tělesy

$\mathbb{F}$ je v celé kapitole konečné těleso (prvočíselné) charakteristiky p, čísla n a k jsou přirozená.

Nejprve připomeňme popis konečných těles z přednášky Algebra:

Fakt 4.1. Pro konečné těleso $\mathbb{F}$ charakteristiky p platí:

(1) Existuje těleso $\mathbb{F}$ velikosti $q \Leftrightarrow$ existuje n, pro něž $|\mathbb{F}| = p^n$,
(2) jestliže $p^n = |\mathbb{F}|$ pak je $\mathbb{F}$ izomorfní rozkladovému nadtělesu polynomu polynomu $x^{p^n} - x$ nad $\mathbb{F}_p$ a $x^{p^n} - x = \prod_{a \in \mathbb{F}}(x - a)$,
(3) pro každé k existuje ireducibilní polynom m stupně k nad tělesem $\mathbb{F}_q$, pro který $\mathbb{F}_q[x]/(m) \cong \mathbb{F}_{q^k}$,
(4) $\mathbb{F}_q^*$ je cyklická grupa a pro každé $k|(q-1)$ existuje právě jedna podgrupa $\mathbb{F}_q^*$ řádu k.

T&N. Až na izomorfismus jednoznačně určené těleso o p^n prvcích se značí $\mathbb{F}_{p^n}$.

Zobrazení $f_{p^k} : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ určené předpisem $f_{p^k}(a) = a^{p^k}$ nazveme *Frobeniův endomorfismus*

Pozorování. Uvažujme $P := \langle 1 \rangle$ a a $U_k := \{t \in \mathbb{F} |\ f_{p^k}(t) = t\}$, pak platí:

(1) f_p je automorfismus a $f_{p^k} = f_{p^k} \circ f_p$,
(2) $P \subseteq U_k$ jsou podtělesa tělesa $\mathbb{F}$ a $U_1 = P \cong \mathbb{Z}_p$,
(3) f_{p^k} je U_k-automorfismus tělesa $\mathbb{F}$.

T&N. Podotělesu P tělesa $\mathbb{F}$ z Pozorování budeme říkat *prvotěleso* tělesa $\mathbb{F}$.

Poznámka 4.2. Nechť p je prvočíslo, k, n, r přirozená čísla, $q = p^r$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(1) k/n v oboru $\mathbb{Z}$,
(2) $(p^k - 1)/(p^n - 1)$ v oboru $\mathbb{Z}$,
(3) $(q^k - 1)/(q^n - 1)$ v oboru $\mathbb{Z}$,
(4) $(x^{q^k} - x)/(x^{q^n} - x)$ v oboru $\mathbb{F}[x]$.

Důkaz. (1)⇒(2) Jestliže $n = kd$, snadno spočítáme, že $p^n - 1 = (p^k - 1)\sum_{i=0}^{d-1} p^{ik}$.

(2)⇒(1) Nechť $(p^k - 1)/(p^n - 1)$ a $n = kd + r$, kde $0 \leq r < k$. Víme, že $p^{kd} - 1 = (p^k - 1)\sum_{i=0}^{d-1} p^{ik}$, tedy $(p^k - 1)/((p^n - 1) - (p^{kd} - 1))$. Protože $(p^n - 1) - (p^{kd} - 1) = p^{kd}(p^r - 1)$ a čísla $p^k - 1$ a p^{kd} jsou nesoudělná, máme $(p^k - 1)/(p^r - 1)$. Ovšem $r < k$, proto $r = 0$.

(1)⇔(3) Stačí uvážit, že $k/n \Leftrightarrow rk/rn$ a to je dle dokázané ekvivalence ekvivalentní tvrzení $(q^k - 1)/(q^n - 1)$.

(3)⇔(4) Použijeme obdobný argument jako v důkazu (1)⇔(2), je-li totiž $(q^n - 1) = s(q^k - 1)$, pak $(x^{q^n} - x) = x(x^{q^k - 1} - 1)\sum_{i=0}^{s-1} x^{i(q^k - 1)}$. □

Poznámka 4.3. Nechť q je přirozené čísl. Pak existuje podtěleso tělesa $\mathbb{F}_{p^n}$ o q prvcích, právě když existuje k/n, pro které $q = p^k$. Podtěleso dané velikosti je určeno jednoznačně.

Důkaz. (⇒) Víme, že podtěleso U řádu q má charakteristiku p, proto podle 4.1(2) existuje $k \geq 1$, pro něž $q = p^k$. Z Lagrangeovy věty použité pro $U^* \leq \mathbb{F}^*_{p^n}$ plyne, že $p^k - 1/p^n - 1$, tudíž k/n díky 4.2.

(⇐) Podle 4.1(2) jsou všechny prvky $\mathbb{F}_{p^n}$ kořeny polynomu $x^{p^n} - x$ a k/n, tudíž podle 4.2 $(x^{p^k} - x)/(x^{p^n} - x)$ a $U_k = \{t \in \mathbb{F}_{p^n} |\ f_{p^k}(t) = t\}$ je podtěleso složené právě z p^k kořenů polynomu $x^{p^k} - x$. Tedy U_k je hledené podtěleso řádu p^k. □

Nyní si uvědomme, že $x^{q^n} - x$ nám poskytne všechny ireducibilní polynomy stupně n nad tělesem řádu q.

Věta 4.4. Je-li $m \in \mathbb{F}_q[x]$ ireducibilní polynom stupně k, pak m dělí $x^{q^n} - x \Leftrightarrow k/n$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je m monický.

(⇒) Protože $m/(x^{q^n} - x) = \prod_{a \in \mathbb{F}_{q^n}} (x - a)$, existuje podle 4.1(2) $\alpha \in \mathbb{F}_{q^n}$, které je kořenem m, a proto je m minimální polynom prvku α nad $\mathbb{F}_q$. Proto $[\mathbb{F}_q(\alpha) : \mathbb{F}_q] = \deg(m) = k$, tedy $|\mathbb{F}_q(\alpha)| = q^k$, kde $q = p^s$ pro vhodné s, a podle 4.3 tak dostáváme, že ks/ns a tudíž k/n.

(⇐) Protože podle 4.1(3) je $\mathbb{F}_q[x]/(m) \cong \mathbb{F}_{q^k}$ kořenové nadtěleso polynomu m a to je zároveň rozkladovým nadtělesem polynomu $x^{q^k} - x$, existuje společný kořen $\alpha \in \mathbb{F}_{q^k}$ obou polynomů. Protože $(x^{q^k} - x)/(x^{q^n} - x)$ díky 4.2 a m je opět minimální polynom prvku α nad $\mathbb{F}_q$, dostáváme, že $m/x^{q^k} - x/(x^{q^n} - x)$. □

Důsledek 4.5. Polynom $x^{q^n} - x$ je právě součinem všech monických ireducibilních polynomů stupně $k|n$.

T&N. Je-li $\mathbb{F}$ těleso, pak $\mathbb{F}_{(n)}$ bude značit rozkladové nadtěleso polynomu $x^n - 1$ nad $\mathbb{F}$ a $\mathbb{E}_{(n)} = \{\alpha \in \mathbb{F}_{(n)} \mid \alpha^n = 1\}$

Pozorování. Nechť $\mathbb{F}$ je těleso charakteristiky p.

(1) $\mathbb{E}_{(n)}$ je podgrupa $\mathbb{F}^*_{(n)}$, tedy cyklická grupa,
(2) pokud p nedělí n, pak $x^n - 1$ má v $\mathbb{F}_{(n)}$ právě n jednoduchých kořenů, $|\mathbb{E}_{(n)}| = n$ a $x^n - 1 = \prod_{\alpha \in \mathbb{E}_{(n)}} (x - \alpha)$,
(3) pokud $n = p^k \cdot m$, kde $k > 0$ a p nedělí m, pak $x^n - 1 = (x^m - 1)^{p^k}$ má v $\mathbb{F}_{(n)}$ právě m kořenů násobnosti p^k a $|\mathbb{E}_{(n)}| = m$ a a $x^n - 1 = \prod_{\alpha \in \mathbb{E}_{(n)}} (x - \alpha)^{p^k}$.

Příklad 4.6. (1) Pro $q = |\mathbb{F}|$, $n = q^r - 1$ máme $x^n - 1 = \frac{x^{q^r} - x}{x}$, proto $\mathbb{F}_{(n)} = \mathbb{F}_{q^r}$ a $\mathbb{E}_{(k)} = \mathbb{F}^*_{q^r}$.
(2) Tedy pro $\mathbb{F}_3$ dostáváme
(a) $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, $\mathbb{F}_{(2)} = \mathbb{F}_3$ a $\mathbb{E}_{(2)} = \mathbb{F}^*_{(3)} = \{1, 2\}$.
(b) $x^8 - 1 = \prod_{a \in \mathbb{F}_9^*} (x - a)$ $\mathbb{F}_{(8)} = \mathbb{F}_9$ a $\mathbb{E}_{(8)} = \mathbb{F}^*_{(9)}$.

Definice. Označme $\mathbb{P}_{(n)}$ generátory grupy $\mathbb{E}_{(n)}$, prvkům množiny budeme říkat *primitivní n-té odmocniny z jedné*. Polynom $Q_n = \prod_{\alpha \in \mathbb{P}_{(n)}} (x - \alpha) \in \mathbb{F}_{(n)}[x]$ nazveme n-tý *cyklotomický polynom*.

Připomeňme, že symbol φ značí Eulerovu funkci.

Pozorování. Nechť $\mathbb{F}$ je těleso charakteristiky p.
(1) $\mathbb{E}_{(n)} = \bigcup_{k/n} \mathbb{P}_{(k)}$ a sjednocení je diskunktní,
(2) $\deg(Q_n) = \varphi(n)$,
(3) pokud $\alpha \in \mathbb{P}_{(n)}$, pak $\mathbb{F}_{(n)} = \mathbb{F}(\alpha)$.

Věta 4.7. Nechť $q = p^r$, p nedělí n, P je prvotěleso tělesa $\mathbb{F}_q$, tj. $P = \mathbb{F}_p$ a d značí řád prvku $(q) \bmod n$ v $\mathbb{Z}_n^*$ (tj. nejmenší kladné d, pro něž $q^d \equiv 1 \pmod{n}$). Potom
(1) $x^n - 1 = \prod_{k|n} Q_k$,
(2) $Q_n \in P[x]$,
(3) Q_n se rozkládá na právě $\frac{\varphi(n)}{d}$ ireducibilních polynomů stupně $d = [\mathbb{F}_{(n)} : \mathbb{F}]$.

Důkaz. (1) Rovnost $x^n - 1 = \prod_{\alpha \in \mathbb{E}_n} (x - \alpha) = \prod_{k|n} Q_k$ plyne z definice a Pozorování (2).

(2) Indukcí podle n nesoudělného s p nahlédneme, že $Q_n \in P[x]$. Pro $n = 1$ tvrzení platí a nyní předpokládejme, že pro všechna $k < n$, pro která $k|n$, platí $Q_k \in P[x]$. Potom podle (1)

$$Q_n = \frac{x^n - 1}{\prod_{k|n, k<n} Q_k} \in P[x].$$

(3) Uvažme prvek $\alpha \in \mathbb{P}_{(n)}$. Potom díky Lagrangeově větě máme

$$\alpha \in \mathbb{F}_{q^k} \Leftrightarrow \alpha^{q^k - 1} = 1 \Leftrightarrow n | q^k - 1 \Leftrightarrow q^k \equiv 1 (\bmod\ n).$$

Proto je-li d řád prvku $(q) \bmod n$ v $\mathbb{Z}_n^*$, pak podle předchozího pozorování $\alpha \in \mathbb{F}_{q^d}$ a $\alpha \notin \mathbb{F}_{q^i}$ pro všechna $i < d$, tudíž podle 4.3 dostáváme $\mathbb{F}_{q^d} = \mathbb{F}_q(\alpha)$. Je-li nyní m monický ireducibilní faktor Q_n nad $\mathbb{F}_q$, existuje $\alpha \in \mathbb{P}_{(n)}$, pro které $m(\alpha) = 0$, tedy jde o minimální polynom α nad $\mathbb{F}_q$ a podle známého tvrzení z algebry

$$\deg(m) = [\mathbb{F}_q(\alpha) : \mathbb{F}_q] = [\mathbb{F}_{q^d} : \mathbb{F}_q] = d.$$

Konečně počet polynomů plyne , pozorování, že $\deg(Q_n) = |\mathbb{P}_{(n)}| = \varphi(n)$. □

Příklad 4.8. (1) Nad $\mathbb{F}_2$ máme

$$Q_1 = x - 1,\ Q_3 = \frac{x^3-1}{x-1} = x^2 + x + 1,\ Q_5 = \frac{x^5-1}{x-1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Potom $Q_{15} = \frac{x^{15}-1}{Q_1 Q_3 Q_5}$.

Zřejmě jsou Q_1 a Q_3 ireducibilní a protože 2 má v $\mathbb{Z}_5^*$ řád 4, je ireducibilní podle 4.6(2) Q_5. 2 má i v $\mathbb{Z}_{15}^*$ řád 4 a Q_{15} je stupně 8, tudíž je součinem dvou ireducibilních polynomů stupně 4.

Dále $x^{30}-1 = (x^{15}-1)^2 = Q_1^2 Q_3^2 Q_5^2 Q_{15}^2$, tedy $x^{30}-1$ má právě 10 ireducibilních faktorů.

(2) Protože 4 má i v $\mathbb{Z}_{15}^*$ řád 2, 8 má i v $\mathbb{Z}_{15}^*$ řád 4 a 16 má i v $\mathbb{Z}_{15}^*$ řád 1, rozkládá se Q_{15} na 4 ireducibilní faktory nad $\mathbb{F}_4$, na 2 ireducibilní faktory nad $\mathbb{F}_8$ a na kořenové činitele nad $\mathbb{F}_{16}$.

5. Cyklické kódy

Předpokládejme, že $n > 1$ je přirozené.

Souřadnice slov délky n budeme indexovat $\mathbf{c} = c_0 c_1 \dots c_{n-1}$, tedy čísly $0, \dots, n-1$.

Definice. Kód $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ je *cyklický*, pokud pro každé slovo $c_0 c_1 \dots c_{n-2} c_{n-1} \in \mathbb{F}^n$ platí implikace $c_0 c_1 \dots c_{n-2} c_{n-1} \in \mathcal{C} \Rightarrow c_{n-1} c_0 \dots c_{n-3} c_{n-2} \in \mathcal{C}$.

Příklad 5.1. Kód $\{0123, 3012, 2301, 1230\} \subset \mathbb{F}_5^4$ je nelineární cyklický a kód LO(1111) $\subset \mathbb{F}_5^4$ je lineární cyklický.

T&N. Uvažujme zobrazení $\nu : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}[x]/(x^n - 1)$ dané vztahem $\nu(c_0 c_1 \dots c_{n-1}) = [\sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i]$, kde $[p]$ značí rozkladovou třídu modulo hlavní ideál $(x^n - 1)$.

Na množině $\mathbb{F}^n$ uvažujme standardní vektorové operace $+$, $-$ a definujme operaci $\cdot$ pomocí operace násobení na faktorovém okruhu $\mathbb{F}[x]/(x^n - 1)$ tak, aby

$$\nu(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \nu(\mathbf{u}) \cdot \nu(\mathbf{v}) = [\sum_{i=0}^{n-1} u_i x^i \cdot \sum_{i=0}^{n-1} v_i x^i] = [\sum_{i=0}^{2n-2} (\sum_{r=0}^{i} u_r v_{i-r}) x^i].$$

Označme $\mathbf{1} = 10 \dots 00$.

Připomeňme, že $\mathbb{F}[x]$ je Eukleidův obor, kde umíme algoritmicky hledat NSD i nsn, proto jde obor hlavních ideálů.

Pozorování. Uvažujme výše uvedené značení. Potom

(1) $\mathbb{F}[x]_n = (\mathbb{F}^n, +, \cdot, -, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ tvoří komutativní okruh,
(2) ν je okruhový izomorfismus a zároveň izomorfismus vektorových prostorů,
(3) je-li $\mathbf{e} = \nu^{-1}([1x])$, pak $\mathbf{e} = 010 \dots 00$ a

$$\mathbf{e} \cdot c_0 c_1 \dots c_{n-2} c_{n-1} = c_{n-1} c_0 \dots c_{n-3} c_{n-2},$$

(4) $\mathbb{F}[x]/(x^n - 1)$ a $\mathbb{F}[x]_n$ jsou okruhy hlavních ideálů.

T&N. Okruh $(\mathbb{F}^n, +, \cdot, -, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ z předchozího Pozorování budeme značit $\mathbb{F}[x]_n$.

Poznámka 5.2. Lineární kód $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ je cyklický $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ je ideál okruhu $\mathbb{F}[x]_n$.

Důkaz. Protože ν je izomorfismus, stačí dokázat, že $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ je cyklický lineární kód $\Leftrightarrow$ $\nu(\mathcal{C})$ je ideál okruhu $\mathbb{F}[x]/(x^n-1)$.

($\Rightarrow$) Nechť $\mathcal{C}$ je cyklický lineární kód $\Rightarrow$ $\nu(\mathcal{C})$ je podprostor vektorového prostoru $\mathbb{F}[x]/(x^n-1)$ nad tělesem $\mathbb{F}$. Protože je $\mathcal{C}$ uzavřeno na cyklické posunutí, $\nu(\mathcal{C})$ je uzavřeno na násobení třídou $[x]$ monomu x. Indukcí nahlédneme, že $\forall i \geq 1$ a $\forall [p] \in \nu(\mathcal{C})$ $[x^i] \cdot [p] = [x] \cdot [x^{i-1}] \cdot [p] \in \nu(\mathcal{C}) \Rightarrow \forall \sum_i a_i x^i \in \mathbb{F}[x]$ máme

$$[\sum_i a_i x^i] \cdot [p] = \sum_i a_i [x^i \cdot p] \in \nu(\mathcal{C}).$$

($\Leftarrow$) Je-li naopak $\nu(\mathcal{C})$ ideál okruhu $\mathbb{F}[x]/(x^n-1)$, pak $\mathcal{C}$ je lineární kód, protože ν je izomorfismus vektorových prostorů a $\nu(\mathcal{C})$ podprostor. Podmínka cykličnosti díky Pozorování (3) plyne z uzavřenosti $\nu(\mathcal{C})$ na násobení prvkem $[x]$. □

Pozorování. V okruhu $\mathbb{F}[x]/(x^n-1)$ platí: .

(1) $([f]) = ([\mathrm{NSD}(f, x^n-1)])$ $\forall$ $f \in \mathbb{F}[x]$,

(2) každý ideál ideál je tvaru $([f])$ pro nějaké $f \in \mathbb{F}[x]$, které dělí x^n-1.

T&N. Pro každý polynom $f \in \mathbb{F}[x]$ stupně menšího než n definujme množinu

$$\mathcal{C}(f) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{F}^n \mid \exists g \in \mathbb{F}[x] : \deg g < n - \deg f, \nu(\mathbf{u}) = [f \cdot g]\}$$

Věta 5.3. Lineární kód $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ je cyklický $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C} = \mathcal{C}(f)$ pro nějaké $f \in \mathbb{F}[x]$, které dělí x^n-1.

Důkaz. Díky 5.2 víme, že $\mathcal{C}$ je cyklický, právě když je to ideál okruhu $\mathbb{F}[x]_n$. Protože $\nu : \mathbb{F}[x]_n \to \mathbb{F}[x]/(x^n-1)$ je izomorfismus okruhů i vektorových prostorů, a ideály druhého (které tvoří podprostor) jsou právě tvaru $([f])$ pro nějaký $f \mid x^n-1$, stačí pro každý takový polynom f ověřit, že $\nu(\mathcal{C}(f)) = ([f])$. Nechť tedy f dělí x^n-1.

($\subseteq$) Z definice $\mathcal{C}(f)$ platí, že $\nu(\mathcal{C}(f)) \subseteq ([f])$.

($\supseteq$) Nechť $[h] \in ([f])$ a označme $g := \frac{x^n-1}{f}$. Potom existuje $a \in \mathbb{F}[x]$, pro které

$$[h] = [a] \cdot [f] = [(af) \mathrm{mod}\ x^n - 1] = [(a) \mathrm{mod} g \cdot f] \in \nu(\mathcal{C}(f)),$$

$\Rightarrow ([f]) \subseteq \nu(\mathcal{C}(f))$. □

Poznámka 5.4. Nechť pro $g = \sum_i g_i x^i, h = \sum_i h_i x^i \in \mathbb{F}[x]$ platí, že $x^n - 1 = g \cdot h$ a označme $k = \deg h$. Pak $\deg g = n-k$, $\mathcal{C}(g)$ je $[n,k]$-kód a

(1) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_{n-k} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & g_0 & \dots & g_{n-k-1} & g_{n-k} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \dots & g_{n-k} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \dots & g_{n-k-1} & g_{n-k} \end{pmatrix}$ je generující matice $\mathcal{C}(g)$,

(2) $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_k & h_{k-1} & \dots & h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_k & \dots & h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \dots & h_0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \dots & h_1 & h_0 \end{pmatrix}$ je kontrolní matice $\mathcal{C}(g)$,

kde $\mathbf{C} \in \mathbb{F}^{k\times n}$ $\mathbf{H} \in \mathbb{F}^{n-k\times n}$.

Důkaz. matice $\mathbf{C} \in \mathbb{F}^{k\times n}$ je odstupňovaná s nenulovými řádky, proto je hodnosti k. Podobně $\mathbf{H}$ je hodnosti $n-k$. Pokud $a = \sum_{i=0}^{n-k-1} a_i x^i$, pak

$$\nu^{-1}([ag]) = \nu^{-1}([a])\mathbf{C} = a_0 \dots a_{n-k-1} \cdot \mathbf{C} \Rightarrow$$

$\mathbf{C}$ je generující matice $\mathcal{C}(g)$. Zbývá nahlédnout, že $\mathbf{C}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$.

Nejprve spočítáme koeficienty součinu $x^n - 1 = gh = \sum_{s=0}^{n}(\sum_{r=0}^{s} g_r h_{s-r})x^s$. Odtud vidíme, že $\sum_{r=0}^{s} g_r h_{s-r} = 0 \ \forall s \in \{1, \dots, n-1\}$.

Označme $\mathbf{C}_i$ i-tý řádek matice $\mathbf{C}_i$ a $\mathbf{H}_j$ j-tý řádek matice $\mathbf{H}_j$ pro $i = 0, \dots k-1$ a $j = 0, \dots n-k-1$, pak

$$\mathbf{C}_i\mathbf{H}_j^T = \begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & g_0 & g_1 & \dots & g_{n-k} & 0 & \dots & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\.\\0\\h_k\\.\\h_0\\0\\.\\0\end{pmatrix} = \sum_{r=i}^{k+j} g_{r-i}h_{k+j-r} = 0,$$

protože $\sum_{r=i}^{k+j} g_{r-i}h_{k+j-r} = \sum_{r=0}^{s} g_r h_{s-r} = 0$ pro $s = k+j-i$, kde $0 \le i \le k-1$ a $0 \le j \le n-k-1 \Rightarrow 1 \le s \le n-1$.

Proto $\mathbf{C}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$, tudíž $\mathbf{C}$ je generující a $\mathbf{H}$ je kontrolní matice kódu $\mathcal{C}(g)$. □

Jakmile umíme najít ireducibilní rozklad polynomu $x^n - 1$ a tedy i všechny dělitele tohoto polynomu, umíme najít všechny cyklické kódy délky n nad tělesem $\mathbb{F}$.

Příklad 5.5. Ireducibilní rozklad polynomu $x^3 - 1$ v oboru $\mathbb{F}_2[x]$ je

$$x^3 - 1 = x^3 + 1 = (x+1)(x^2 + x + 1),$$

proto máme právě 4 dělitele $x^3 - 1$ a tedy existují právě 4 cyklické binární lineární kódy. Dva triviální odpovídají triviálním dělitelům $\mathcal{C}(1) = \mathbb{F}_2^3$, $\mathcal{C}(x^3+1) = \{\mathbf{0}\}$.

Potom má kód $\mathcal{C}(x+1)$ generující matici $\mathbf{C} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ a kontrolní matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, zatímco kód $\mathcal{C}(x^2+x+1)$ má generující matici $\mathbf{H}$ a kontrolní matici $\mathbf{C}$.

6. GRS kódy a jejich reziduální kódy

Uvažujme, že charakteristika p nedělí n a připomeňme, že $\mathbb{F}_{(n)}$ značí rozkladové nadtěleso polynomu $x^n - 1$ nad $\mathbb{F}$.

Zobecněme konstrukci MDS kódu z Příkladu 3.6:

T&N. Nechť $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}^*$ jsou po dvou různé prvky, položme $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{F}_q^*)^n$ a nechť $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in (\mathbb{F}^*)^n$. Potom pro $r < n$ definujme matice

$$\mathbf{H}_\alpha^r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ \alpha_1^{r-1} & \alpha_2^{r-1} & \ldots & \alpha_n^{r-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{r\times n}, \quad \Delta(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & v_2 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}$$

Lineární kód $\mathcal{C} = \ker(\mathbf{H}_\alpha^r \Delta(\mathbf{v}))$ s kontrolní maticí $\mathbf{H}_\alpha^r \Delta(\mathbf{v})$ se nazývá *zobecněný Reedův-Solomonův* (GRS) kód s *lokátory* α a *multiplikátory* $\mathbf{v}$.

$\mathcal{C}$ se nazývá

- normovaný GRS kód, pokud $v_i = 1\ \forall i$,
- GRS v užším smyslu, pokdu $\mathbf{v} = \alpha$,
- Reedův-Solomonův (RS), pokud $\exists \alpha \in \mathbb{F}^*$ řádu n a $0 < b < n$ tak, že $\alpha_i = \alpha^{i-1}$ a $v_i = \alpha^{b(i-1)}$.

Pozorování. Uvažujme předpoklady předchozí terminologické poznámky a $k < n$.

(1) GRS kódy jsou MDS díky 3.1 a 3.6,

(2) RS kód má pro $r = n - k + 1$ a $0 < b < n$ generující a kontrolní matici tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha^{n-b+1} & \alpha^{2(n-b+1)} & \ldots & \alpha^{(n-1)(n-b+1)} \\ 1 & \alpha^{n-b+2} & \alpha^{2(n-b+2)} & \ldots & \alpha^{(n-1)(n-b+2)} \\ . & . & \ldots & . & \\ . & . & \ldots & . & \\ 1 & \alpha^{n-b+k} & \alpha^{2(n-b+k)} & \ldots & \alpha^{(n-1)(n-b+k)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \alpha^{b} & \alpha^{2b} & \ldots & \alpha^{(n-1)b} \\ 1 & \alpha^{b+1} & \alpha^{2(b+1)} & \ldots & \alpha^{(n-1)(b+1)} \\ . & . & \ldots & . & \\ . & . & \ldots & . & \\ 1 & \alpha^{b+r} & \alpha^{2(b+r)} & \ldots & \alpha^{(n-1)(b+r)} \end{pmatrix}.$$

(3) Pro kód $\mathcal{C}$ s generující maticí $\mathbf{C} = \mathbf{H}_\alpha^k$ existuje kontrolní matice tvaru $\mathbf{H} = \mathbf{H}_\alpha^{n-k}\Delta(\mathbf{v})$ pro vhodné $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in (\mathbb{F}^*)^n$. Pro jeho nalezení stačí uvážit podmínku $\mathbf{C}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$, která je ekvivalentní podmínce

$$\sum_{s=1}^{n} \alpha_s^{i+j} v_s = (\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_n^i)\Delta(\mathbf{v})(\alpha_1^j, \alpha_2^j, \ldots, \alpha_n^j)^T = 0$$

$\forall i = 0, \ldots, k-1, j = 0, \ldots, n-k-1 \Leftrightarrow \mathbf{H}_\alpha^{n-1}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, tedy $\mathbf{v}$ řeší homogenní soustavu s maticí

$$\mathbf{H}_\alpha^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ \alpha_1^{n-2} & \alpha_2^{n-2} & \ldots & \alpha_n^{n-2} \end{pmatrix}.$$

Protože je každých $n-1$ sloupců této matice lineárně nezávislých, jsou všechny souřadnice nenulového řešení nenulové.

Poznámka 6.1. Nechť p je charakteristika tělesa $\mathbb{F}$ a p nedělí n. Označme $\mu(\mathbf{u}) = \sum_{i=0}^{n-1} u_i x^i\ \forall\ \mathbf{u} = u_0 \ldots u_{n-1} \in \mathbb{F}^n$ (tedy $\nu(\mathbf{u}) = [\mu(\mathbf{u})]$).

(1) Je-li $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ lineární cyklický kód, $M = \{\alpha \in \mathbb{F}_{(n)} \mid \mu(\mathbf{u})(\alpha) = 0\ \forall \mathbf{u} \in \mathcal{C}\}$ a $f = \prod_{\alpha\in M} x - \alpha$, pak $f \in \mathbb{F}[x]$, f dělí $x^n - 1$ a $\mathcal{C} = \mathcal{C}(f)$.

(2) Jestliže $\alpha_i \in \mathbb{F}_{(n)}$ je kořen $x^n - 1$, m_i je minimální polynom α_i $\forall i = 1, \ldots, r$ a $\mathcal{C} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{F}^n \mid \mu(\mathbf{u})(\alpha_i) = 0 \ \forall i \leq r\}$, pak $\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathcal{C}(m_i) = \mathcal{C}(\mathrm{nsn}_{i \leq r}(m_i))$ je cyklický kód.

Důkaz. (1) Podle 5.3 existuje monický polynom g, který dělí $x^n - 1$ a platí, že $\mathcal{C} = \mathcal{C}(g)$. Označme $\mathbb{E}_{(n)} = \{\alpha \in \mathbb{F}_{(n)} \mid \alpha^n = 1\}$. Protože $\mathrm{NSD}(x^n - 1, nx^{n-1}) = 1$, jsou všechny kořeny $x^n - 1$ i g jednoduché $\Rightarrow \exists L \subseteq \mathbb{E}_{(n)}$ splňující $g = \prod_{\alpha \in L} x - \alpha$.

Nyní $\alpha \in L \Leftrightarrow g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \mu(\mathbf{u})(\alpha) = 0 \ \forall \mathbf{u} \in \mathcal{C}(g) \Leftrightarrow \alpha \in M$.

Proto $g = f$, a proto $L = M$ a $\mathcal{C} = \mathcal{C}(g) = \mathcal{C}(f)$.

(2) Položme $f = \mathrm{nsn}_{i \leq r}(m_i)$. Pak $\mathbf{u} \in \mathcal{C} \Rightarrow m_i | \mu(\mathbf{u}) \ \forall i \Rightarrow f | \mu(\mathbf{u}) \Rightarrow \mathbf{u} \in \mathcal{C}(f)$.

Naopak, $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(f) \Rightarrow f | \mu(\mathbf{u}) \Rightarrow \mu(\mathbf{u})(\alpha_i) = 0 \ \forall i \Rightarrow \mathbf{u} \in \mathcal{C}$.

To znamená, že $\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathcal{C}(m_i) = \mathcal{C}(\mathrm{nsn}_{i \leq r}(m_i))$ je cyklický kód. □

Důsledek 6.2. RS kódy jsou cyklické

Důkaz. Buď $\mathcal{C}$ RS kód s lokátory $\alpha_i = \alpha^{i-1}$ pro prvek grupy $\alpha \in F^*$ řádu n a multiplikátory $\alpha_i = \alpha^{b(i-1)}$). Pak $\mathbf{u} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha^b & \alpha^{2b} & \ldots & \alpha^{(n-1)b} \\ 1 & \alpha^{b+1} & \alpha^{2(b+1)} & \ldots & \alpha^{(n-1)(b+1)} \\ . & . & \ldots & . & \\ . & . & \ldots & . & \\ 1 & \alpha^{b+n-k-1} & \alpha^{2(b+n-k-1)} & \ldots & \alpha^{(n-1)(b+n-k-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ . \\ . \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$\Leftrightarrow \mu(\mathbf{u})(\alpha^{b+i}) = 0 \ \forall i < n - k$. Tedy $\mathcal{C}$ je cyklický podle 6.1(2). □

Definice. Nechť $r \in \mathbb{N}$, $\mathbb{F}_q$ je podtěleso $\mathbb{F}_{q^r}$ a $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_{q^r}^n$. Pak $\mathcal{C} \cap \mathbb{F}_q^n$ se nazývá *q-ární reziduální kód* kódu $\mathcal{C}$.

Pozorování. Nechť $r \in \mathbb{N}$, $\mathbb{F}_q$ je podtěleso $\mathbb{F}_{q^r}$ a $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_{q^r}^n$ je lineární kód.

(1) $\mathbb{F}_{q^r}$ je vektorový prostor dimenze r nad tělesem $\mathbb{F}_q$.
(2) Nechť $B \subset \mathbb{F}_q^n$. Pak B je lineárně nezávislá nad $\mathbb{F}_q \Leftrightarrow B$ je lineárně nezávislá nad $\mathbb{F}_{q^r}$ (zpětná implikace je triviální a pro přímou je třeba zvolit $(\beta_i)_{i \leq r}$ bázi $\mathbb{F}_{q^r}$ nad $\mathbb{F}_q$ a lineární kombinaci napsat vzhledem k $(\beta_i)_{i \leq r}$).
(3) $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cap \mathbb{F}_q^n$ je q-ární lineární kód a $\dim_{\mathbb{F}_q} \tilde{\mathcal{C}} \leq \dim_{\mathbb{F}_{q^r}} \mathcal{C}$.
(4) Je-li $\mathcal{C}$ cyklický, pak $\mathcal{C} \cap \mathbb{F}_q^n$ je rovněž cyklický.

T&N. *Alternantní* kódy jsou reziduální kódy GRS kódů a reziduální kódy RS kódů se nazývají *BCH* kódy (Bose–Chaudhuri–Hocquenghem).

Protože jsou RS kódy cyklické, dostáváme z posledního pozorování, že

Důsledek 6.3. BCH kódy jsou cyklické.

Příklad 6.4. Nechť $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \alpha, \beta\}$, kde $\alpha\beta = 1 = \alpha + \beta$. Uvažujme reziduální binární kódy kvaternárních kódů.

(1) $\mathrm{LO}(10\alpha 0, 010\beta) \cap \mathbb{F}_2^4 = \{0000\}$,
(2) $\mathrm{LO}(10\alpha 0, 01\beta 0) \cap \mathbb{F}_2^4 = \mathrm{LO}(1110)$,
(3) $\mathrm{LO}(\beta\alpha 1\beta, \alpha\beta 1\alpha) \cap \mathbb{F}_2^4 = \mathrm{LO}(1101, 1011)$.

Pozorování. Nechť $\alpha_i \in (\mathbb{F}_{q^r})_{(n)}$, $\alpha_i^n = 1$ a označme m_i minimální polynom prvku α_i nad tělesem $\mathbb{F}_q$ a $m_{i,r}$ minimální polynom prvku α_i nad tělesem $\mathbb{F}_{q^r}$. Pokud $f = \mathrm{nsn}_i(m_{i,r}) \in \mathbb{F}_{q^r}[x]$ a $g = \mathrm{nsn}_i(m_i) \in \mathbb{F}_q[x]$, pak

$$\mathcal{C}(f) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{F}_{q^r}^n \mid \mu(\mathbf{u})(\alpha_i) = 0 \forall i\},\ \mathcal{C}(g) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{F}_q^n \mid \mu(\mathbf{u})(\alpha_i) = 0 \forall i\}$$

a $\mathcal{C}(g) = \mathbb{F}_q^n \cap \mathcal{C}(f)$, kde uvažujeme μ z 6.1.

Věta 6.5 (o kódech se zaručenou vzdáleností)**.** Je-li $\mathcal{C}$ $[n, l, D]_{q^r}$ kód, který je MDS, a $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cap \mathbb{F}_q^n$ je $[n, k, d]_q$ kód, pak $k \geq n - r(D-1)$ a $d \geq D \geq \frac{n-k}{r} + 1$.

Důkaz. $\mathcal{C}$ je MDS $\Rightarrow D = n - l + 1 \Rightarrow n - l = D - 1$. Dokážeme-li, že $n - k \leq r(n - l)$, pak odtud dostaneme obě nerovnosti $k \geq n - r(D-1)$ i $d \geq D \geq \frac{n-k}{r} + 1$. Všimněme si, že $n - k$ je právě počet řádků (libovolné) kontrolní matice kódu $\tilde{\mathcal{C}}$. Zvolme nějakou kontrolní matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \dots \\ \mathbf{h}_{n-l} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_{q^r}^{(n-l)\times n}$ kódu $\mathcal{C}$ s řádky $\mathbf{h}_i$ a označme $\beta_1, \dots, \beta_r$ nějakou bázi $\mathbb{F}_{q^r}$ nad $\mathbb{F}_q \Leftarrow \exists \mathbf{a}_{ji} \in \mathbb{F}_q^n$ pro $i = 1, \dots, n-l$ a $j = 1, \dots, r$ splňující $\mathbf{h}_i = \sum_{j=1}^r \beta_j \mathbf{a}_{ji}$. Definujme matice

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1i} \\ \dots \\ \dots \\ \mathbf{a}_{ri} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_q^{r\times n} \quad \text{a} \quad \tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \dots \\ \dots \\ \mathbf{A}_{n-k} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_q^{(n-l)r\times n}.$$

Potom $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{C}} \Leftrightarrow \mathbf{u} \in \mathcal{C}$ a $\mathbf{u} \in \mathbb{F}_q^n \Leftrightarrow \mathbf{u}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$ a $\mathbf{u} \in \mathbb{F}_q^n \Leftrightarrow \mathbf{u}\tilde{\mathbf{H}}^T = \mathbf{0}$ a $\mathbf{u} \in \mathbb{F}_q^n$. Proto $\tilde{\mathcal{C}} = \mathrm{Ker}\tilde{\mathbf{H}}$ a počet řádků kontrolní matice kódu $\tilde{\mathcal{C}}$ je roven $\mathrm{rank}\tilde{\mathbf{H}} \leq (n-l)r$ (což je počet řádků $\tilde{\mathbf{H}}$). Dokázali jsme, že $n - k \leq (n-l)r$. □

Důsledek 6.6. Pro BCH (alternantní) $[n, k, d]_q$ kód RS (GRS) $[n, l, D]_{q^r}$ kódu platí odhady $k \geq n - r(D-1)$ a $d \geq \frac{n-k}{r} + 1$.

Příklad 6.7. Uvažujme těleso $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3(\alpha)$ pro α splňující $\alpha^2 + 1 = 0$ a nad ním GRS $[6, 4, 3]_9$ kód s kontrolní maticí $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha & 2\alpha & \alpha+1 & 2\alpha+2 \end{pmatrix}$. Pro reziduální kód $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cap \mathbb{F}_3^6$ určíme stejně jako v důkazu 6.5 matici $\tilde{\mathbf{H}}$, pro níž platí, že $\tilde{\mathcal{C}} = \mathrm{Ker}\tilde{\mathbf{H}}$. K tomu zvolíme bázi $1, \alpha$ prostoru $\mathbb{F}_9$ nad $\mathbb{F}_3$.

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Odtud vidíme, že alternantní kód $\tilde{\mathcal{C}}$ je $[6, 3]_3$ kód a z 6.5 dostáváme odhad jeho vzdálenosti $d \geq \frac{3}{2} + 1$, tedy $d \geq 3$. Naopak více to podle 2.3 být nemůže (součet 1., 3. a 6. sloupce kontrolní matice je nulový), tedy $\tilde{\mathcal{C}}$ je $[6, 3, 3]_3$ kód.

7. Reedovy-Mullerovy kódy

V celé kapitole předpokládáme, že $r \leq m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{F}_q$ je těleso a $n = q^m$ a slova $\mathbb{F}_q^m$ si pevně očíslujeme

$$\mathbb{F}_q^m = \{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}.$$

T&N. Každé množině

$$\mathcal{R}_q(m,r) = \{f(\beta_0)f(\beta_1)\ldots f(\beta_{n-1}) \mid f \in \mathbb{F}_q[x_1,\ldots,x_m], \deg(f) \leq r\}.$$

budeme říkat q-ární Reedův-Mullerův kód (krátce RM-kód). Binární RM-kód značíme prostě $\mathcal{R}(m,r) = \mathcal{R}_2(m,r)$.

Dále označme $x_I = \prod_{i\in I} x_i$ pro každé $I \subseteq \{1,\ldots,m\}$, speciálně $x_\emptyset = 1$ a definujme množiny Boolevých polynomů

$$\mathcal{BP}_m(r) = \{\sum_{I:|I|\leq r} f_I x_I \mid f_I \in \mathbb{F}_2 \forall I \subseteq \{1,\ldots,m\}\},$$

speciálně $\mathcal{BP}_m = \mathcal{BP}_m(m)$ a množinu Boolevých funkcí

$$\mathcal{BF}_m = \{\mathbb{F}_2^m \to \mathbb{F}_2\}.$$

Na $\mathcal{BP}_m$ zavedeme strukturu okruhu

$$\sum_I a_I x_I \pm \sum_I b_I x_I = \sum_I (a_I \pm b_I) x_I$$

$$\sum_I a_I x_I \cdot \sum_J b_J x_J = \sum_{I,J} (a_I \cdot b_J) x_{I\cup J} = \sum_K \sum_{I,J:K=I\cup J} (a_I \cdot b_J) x_K.$$

Na $\mathcal{BF}_m$ máme k dispozici přirozeně definovanou strukturu okruhu po složkách, tj. $\forall f, g \in \mathcal{BF}_m$

$$f \pm g(\beta) = f(\beta) \pm g(\beta), \quad f \cdot g(\beta) = f(\beta) \cdot g(\beta).$$

Konečně, $i_J = i_1 \ldots, i_n$ značí incidenční vektor množiny I, tj. $i_j = 1 \Leftrightarrow j \in J$ a pro $I, J \subseteq \{1,\ldots,m\}$ značme $\chi_I \in \mathcal{BF}_m$ funkci danou podmínkou $\chi_I(i_J) = 1 \Leftrightarrow J = I$.

Pozorování. Pro RM kódy a Booleovy polynomy a funkce platí:

(1) $\mathcal{R}_q(m,r)$ je lineární kód délky $n = q^m$,
(2) $(\mathcal{BP}_m, +, -, \cdot, 0, 1)$ a $(\mathcal{BF}_m, +, -, \cdot, 0, 1)$ jsou komutativní okruhy,
(3) přirozená projekce $p \to [p]$ je izomorfismus okruhů $\mathcal{BP}_m \cong \mathbb{F}_2[x_1,\ldots,x_m]/(x_1^2 + x_1, \ldots, x_m^2 + x_m)$,
(4) zobrazení $f \to (f(\beta_0),\ldots,f(\beta_{n-1}))$ je izomorfismus okruhů $\mathcal{BF}_m \cong \mathbb{F}_2^n$, kde $n = 2^m$,
(5) dosazovací zobrazení $p \to p(\beta)$ tvoří pro každé $\beta \in \mathbb{F}_2^m$ okruhový homomorfismus $\mathcal{BP}_m \to \mathbb{F}_2$,
(6) $\mathcal{R}(m,r) = \{p(\beta_0)\ldots p(\beta_{n-1}) \mid p \in \mathcal{BP}_m(r)\}$,
(7) pro každé $f \in \mathcal{BF}_m$ platí, že $f = \sum_{I:f(i_I)=1} \chi_I$,

Všimněme si, že všechny tři uvažované izomorfní okruhy jsou zároveň vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{F}_2$ (tedy $\mathbb{F}_2$-algebry), proto jsou všechny jejich okruhové izomorfismus zároveň izomorfismy vektorových prostorů nad $\mathbb{F}_2$.

T&N. Pro $p = \sum_i p_I x_I \in \mathcal{BP}_m$ značme $N(p) = \{i_I \in \mathbb{F}_2^m \mid p(i_I) = 1\}$ a $\deg(p) = \max\{|I| \mid p_I \neq 0\} \cup \{-1\}$.

Poznámka 7.1. Jestliže $p \in \mathcal{BP}_m(r) \setminus \{0\}$, pak $|N(p)| \geq 2^{m-r}$.

Důkaz. Dokazujeme indukcí podle $m \geq 1$ a p stupně $\deg(p) \leq r$.

(a) Pro $m = 1$ uvažujeme polynomy tvaru $p = a_0 + a_1 x_1 \in K[x_1]$. Provedeme diskusi pro oba případy $r = 0, 1$.

Pro $r = 0$ máme $a_0 = 1$ a $a_1 = 0 \Rightarrow p = 1 \Rightarrow |N(p)| = 2 = 2^{1-0}$.

Pro $r = 1$ triviálně dostáváme $|N(p)| \geq 1 = 2^{1-1}$.

(b) Předpokládejme, že tvrzení platí pro $m - 1$ a dokážeme ho pro $m > 1$. Nechť $p = x_m g + h$, kde $g, h \in K[x_1, \ldots, x_{m-1}]$.

Pokud $g = 0$, pak $\deg h = \deg p$ a platí $h(i_1, \ldots, i_{m-1}) = 1 \Leftrightarrow p(i_1, \ldots, i_{m-1}, 0) = p(i_1, \ldots, i_{m-1}, 1) = 1$, proto s využitím indukčního předpokladu pro h

$$|N(p)| = 2|N(h)| \geq 2 \cdot 2^{m-1-r} = 2^{m-r}.$$

Pokud $g \neq 0$, pak $\deg g \leq r - 1$ a $\forall (i_1, \ldots, i_{m-1}) \in \mathbb{N}(g)$ existuje $t \in \mathbb{F}_2$ splňující $p(i_1, \ldots, i_{m-1}, t) = g(i_1, \ldots, i_{m-1})t + h(i_1, \ldots, i_{m-1}) = t + h(i_1, \ldots, i_{m-1}) = 1$, proto

$$|N(p)| \geq |N(g)| \geq 2^{m-1-(r-1)} = 2^{m-r}.$$

díky platnosti indukčního předpokladu pro g. □

T&N. Označme zobrazení $\Phi : \mathcal{BP}_m \to \mathcal{BF}_m$ dané podmínkou $\Phi(p)(\beta) = p(\beta)$.

Nadále budeme ztotožňovat $\mathcal{BF}_m \cong \mathbb{F}_2^n$ bijekcí $f \to (f(\beta_0), \ldots, f(\beta_{n-1}))$, proto lze zobrazení Φ popsat vztahem $\Phi(p) = (p(\beta_0), \ldots, p(\beta_{n-1}))$.

Pozorování. Pro zobrazení $\Phi : \mathcal{BP}_m \to \mathcal{BF}_m$ a množiny $J, Y \subseteq \{1, \ldots, m\}$ platí:

(1) Je-li $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ a položíme-li $p_I = (\prod_{i \in I} x_i) \cdot (\prod_{i \notin I} x_i + 1)$, pak $\Phi(p_I) = \chi_I$, proto pokud $p = \sum_{I : f(i_I) = 1} p_I$ pro nějaké $f \in \mathcal{BF}_m$, pak $\Phi(p) = \chi_f$,

(2) Φ je izomorfismus okruhů (i vektorových prostorů),

(3) $\{x_I \mid I \subseteq \{1, \ldots, m\}, |I| \leq r\}$ je báze $\mathcal{BP}_m(r)$, proto je množina $B_r = \{\Phi(x_I) \mid I \subseteq \{1, \ldots, m\}, |I| \leq r\}$ báze $\mathcal{R}(m, r)$,

(4) $w(\Phi(p)) = |N(p)| \ \forall p \in \mathcal{BP}_m$,

(5) $x_J(i_Y) = \prod_{j \in J} (i_Y)_j = 1 \Leftrightarrow J \subseteq Y$.

Věta 7.2. $\mathcal{R}(m, r)$ je $[n, \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}, 2^{m-r}]_2$ kód.

Důkaz. Z Pozorování (2) a (3) dostáváme, že $\dim(\mathcal{R}(m, r)) = \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}$.

Jestliže $|I| = r \Rightarrow x_I \in \mathcal{R}(m, r) \Rightarrow w(x_I) = |N(x_I)| = 2^{m-r}$ podle Pozorování (4) a (5) $\Rightarrow d(\mathcal{R}(m, r)) \leq 2^{m-r}$.

Naopak díky 7.1 a Pozorování (4) dostáváme $d(\mathcal{R}(m, r)) \geq 2^{m-r}$. □

Věta 7.3. Kódy $\mathcal{R}(m, r)$ a $\mathcal{R}(m, m - r - 1)$ jsou vzájemně duální.

Důkaz. Nejprve dokážeme pro báze B_r a B_{m-r-1}, že $\forall\ \Phi(x_I) \in B_r$, $\Phi(x_J) \in B_{m-r-1}$ platí, že pro bodový součin $\Phi(x_I) \cdot \Phi(x_J) = 0$. Protože $|I| \leq r$ a $|J| \leq m - r - 1$, spočítáme

$$\Phi(x_I) \cdot \Phi(x_J) = \sum_B x_I(i_B) \cdot x_J(i_B) = \sum_B x_{I \cup J}(i_B).$$

Uvědomíme-li si, že podle Pozorování (5) $x_{I\cup J}(i_B) = 1 \Leftrightarrow I \cup J \subseteq B$ a že $|I \cup J| \leq r + m - r - 1 = m - 1$ dostáváme

$$\Phi(x_I) \cdot \Phi(x_J) \equiv \sum_{B:I\cup J\subseteq B} 1 \equiv 2^{m-|I\cup J|} \equiv 0 \pmod 2.$$

Dokázali jsme, že $\mathcal{R}(m,r) \subseteq \mathcal{R}(m,m-r-1)^\perp$ a $\mathcal{R}(m,m-r-1) \subseteq \mathcal{R}(m,r)^\perp$. Protože navíc podle 7.2 $\dim \mathcal{R}(m,r) + \dim \mathcal{R}(m,m-r-1) =$

$$= \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i} + \sum_{i=0}^{m-r-1} \binom{m}{i} = \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i} + \sum_{i=r+1}^{m} \binom{m}{i} = 2^m$$

jsou prostory $\mathcal{R}(m,r)$ a $\mathcal{R}(m,m-r-1)$ vzájemně duální. □

Příklad 7.4. $\mathcal{R}(3,1)$ je podle 7.2 samoduální $[8,4,4]_2$ kód.

T&N. Je-li $f \in \mathcal{BP}_m$ nebo $f \in \mathcal{BF}_m$, $I, Y \subseteq \{1,\ldots,m\}$, pak definujme $f^I \in \mathcal{BF}_m$ předpisem

$$f^I(i_Y) = \sum_{B:Y\subseteq B\subseteq I\cup Y} f(i_B).$$

Pozorování. Nechť $I, J, Y \subseteq \{1,\ldots,m\}$, pak $x_J^I(i_Y) = 1 \Leftrightarrow$

$$1 = \sum_{B:Y\subseteq B\subseteq I\cup Y} x_J(i_B) = \sum_{B:J\cup Y\subseteq B\subseteq I\cup Y} 1 \Leftrightarrow J \cup Y = I \cup Y.$$

Poznámka 7.5. Nechť $I, Y \subseteq \{1,\ldots,m\}$, $d \in \mathbb{N}$, $f = \sum_J a_J x_J \in \mathcal{BP}_m(d)$, $I \cap Y = \emptyset$, $|I| = d$. Pak $a_I = f^I(i_Y)$.

Důkaz. Nejprve dosadíme do vyjádření $f^I(i_Y) = \sum_{B:Y\subseteq B\subseteq I\cup Y} f(i_B)$ za f:

$$f^I(i_Y) = \sum_{B:Y\subseteq B\subseteq I\cup Y} \sum_J a_J x_J(i_B) = \sum_J a_J \sum_{B:Y\subseteq B\subseteq I\cup Y} x_J(i_B) = \sum_J a_J x_J^I(i_Y).$$

Protože $I \cup Y = J \cup Y \Leftrightarrow I = J$, neboť $|J| \leq d$, $|I| = d$ a $I \cap Y = \emptyset$, dostáváme z Pozorování:

$$f^I(i_Y) = \sum_J a_J x_J^I(i_Y) = a_I.$$

□

Uvážíme pro $k = \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}$ (lineární) kódování $\mathbb{F}_2^k = \mathbb{F}_2^{\{I||I|\leq r\}} \to \mathcal{BF}(m) \cong \mathbb{F}_2^n$ dané vztahem $\mathbf{v} \to \Phi(f_\mathbf{v})$, kde $f_\mathbf{v} = \sum_{I:|I|\leq r} v_I x_I$.

Na základě předchozího tvrzení můžeme formulovat dekódovací algoritmus, který přijaté chybové slovo s váhou chyby menší než 2^{m-r-1} reprezentovaného booleovskou funkcí opraví na původní booleovský polynom:

`VSTUP:` $g \in \mathcal{BF}_m$ `splňující` $g = f + e$ `pro` $f \in \mathcal{R}(m,r)$ `a` $e \in \mathbb{F}_2^n$, $w(e) < 2^{m-r-1}$
`VÝSTUP:` $\tilde{f} \in \mathcal{BP}_m(r)$, `pro který` $d(\Phi(\tilde{f}), g) < 2^{m-r-1}$, `proto` $f = \Phi(\tilde{f})$.
`for d=r downto 0 do`
  `for all` $I \subseteq \{1,\ldots,m\} : |I| = d$ `do`
    $\alpha_0 := |\{Y \subseteq \{1,\ldots,m\} : Y \cap I = \emptyset, g^I(i_Y) = 0\}|$;
    $\alpha_1 := 2^{m-d} - \alpha_0$ $(= |\{Y \subseteq \{1,\ldots,m\} : Y \cap I = \emptyset, g^I(i_Y) = 1\}|)$;

`if` $\alpha_0 > \alpha_1$ `then` $a_I := 0$ `else` $a_I := 1$, $g := g + \Phi(x_I)$;
`return` $\sum_{I \in \mathcal{P}_r^m} a_I x_I$.

Poznámka 7.6. Algoritmus je korektní, tj. má-li na vstupu slovo $g = f + e$ pro $f \in \mathcal{R}(m,r)$ a $e \in \mathbb{F}_2^n$ váhy $w(e) < 2^{m-r-1}$, vrátí f.

Důkaz. Technický důkaz opírající se o 7.5 vynecháme, zájemci jej naleznou například ve skriptech Aleše Drápala. □

8. Golayovy perfektní kódy

T&N. Označme $X = \{x_1, \dots, x_v\}$ a $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_b\} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Je-li $B \in \mathcal{B}$, pak definujme $i_B = i_1 \dots i_v \in \mathbb{F}_2^v$ podmínkou $i_j = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } x_j \in B \\ 0 & \text{jestliže } x_j \notin B \end{cases}$

Dále položme $i_{B_j} \cap i_{B_k} = i_{B_j \cap B_k}$ a řekneme, že je matice $M = \begin{pmatrix} i_{B_1} \\ \dots \\ i_{B_b} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{b \times v}$ *incidenční maticí* systému $\mathcal{B}$.

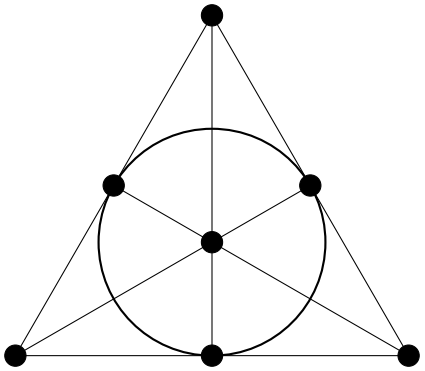
Pozorování. Nechť M je incidenční matice systému $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_b\} \subseteq \mathcal{P}(X)$, kde $X = \{x_1, \dots, x_v\}$ a položme $U = (u_{ij}) = MM^T$ a $V = (v_{ij}) = M^T M$. Potom platí:

(1) Operace $\cap$ je na $\mathbb{F}_2^v$ právě operací násobení po složkách
(2) Jestliže $A, B \subseteq X$, pak $w(i_A + i_B) = |A \div B| = w(i_A) + w(i_B) - 2w(i_{A \cap B})$,
(3) U je symetrická čtvercová, $u_{ij} = |B_i \cap B_j| \ \forall i,j$ a $u_{ii} = |B_i|$,
(4) V je symetrická čtvercová, $v_{ij} = |\{s \mid \{x_i, x_j\} \subseteq B_s\}| \ \forall i,j$ a $v_{ii} = |\{s \mid x_i \in B_s\}|$.

T&N. Buď $X \neq \emptyset$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $v, k, \lambda \in \mathbb{N}$. Řekneme, že $\mathcal{B}$ je *symetrický* $2 - (v, k, \lambda)$ *design*, pokud

- $v = |X| = |\mathcal{B}|$,
- $k = |B| = |\{C \in \mathcal{B} \mid x \in C\}|$ pro $\forall B \in \mathcal{B}$ a $\forall x \in X$,
- $\lambda = |B_1 \cap B_2| = |\{C \in \mathcal{B} \mid \{b, c\} \subseteq C\}| \ \forall B_1 \neq B_2 \in \mathcal{B}$ a $\forall b \neq c \in X$.

Příklad 8.1. (1) Přímky Fanovy roviny, tj. projektivního prostoru $P_2(\mathbb{F}_2)$ všech jednodimenzionálních podprostorů vektorového prostoru $\mathbb{F}_2^3$ tvoří symetrický $2 - (7, 3, 1)$ design.



(2) Obecněji, nechť $\mathcal{P} = \{\mathrm{LO}(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in \mathbb{F}_q^3 \setminus \{\mathbf{0}\}\}$, $B_V = \{p \in \mathcal{P} \mid p \subseteq V\}$, pak $\mathcal{B} = \{B_V \mid V \leq \mathbb{F}_q^3, \dim V = 2\}$ je symetrický $2 - (q^2 + q + 1, q + 1, 1)$ design.

Pozorování. Systém $\mathcal{B}$ s incidenční maticí M je symetrický $2-(v,k,\lambda)$ design, právě když $MM^T = M^TM = \begin{pmatrix} k & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & k & \dots & \lambda \\ . & . & \dots & . \\ \lambda & \lambda & \dots & k \end{pmatrix}$.

Konstrukce

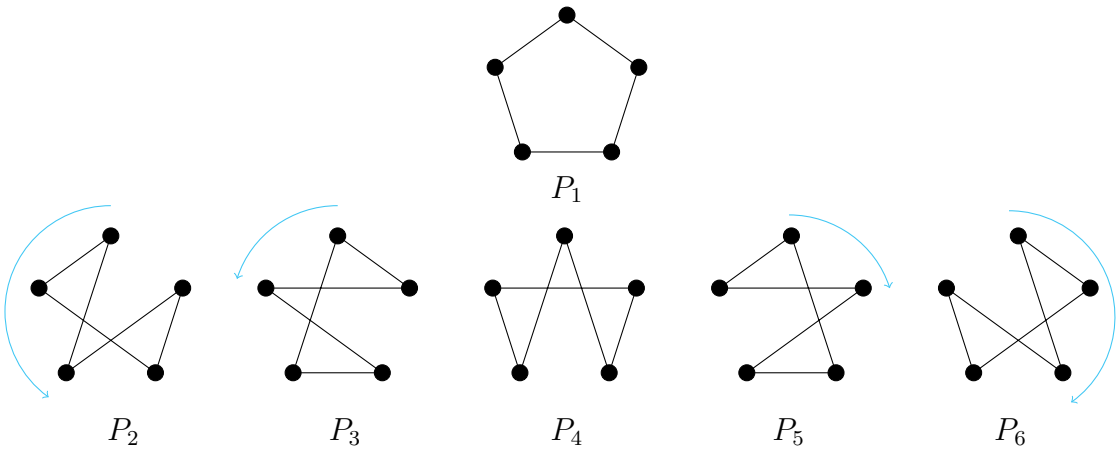
Nechť $Y = \{1,\dots,5\}$, $Z = \{A \subset \mathcal{P}(Y) \mid |A| = 2\}$, $\Phi = \{\sigma \in S_5 \mid \sigma^5 = 1, \sigma \neq \mathrm{id}\}$, $P_\varphi = \{\{i,\varphi(i)\} \mid i \in Y\}$ $\forall \varphi \in \Phi$.

Pozorování. Pro množiny Y, Z, Φ a P_φ a $\forall \varphi, \psi \in \Phi$ platí:

(1) $|Z| = 10$, $|\Phi| = 24$, $|\{P_\varphi \mid \varphi \in \Phi\}| = 12$,
(2) φ nemá pevný bod $\Rightarrow P_\varphi \cap P_{\varphi^2} = \emptyset$ $\forall \varphi \in \Phi$,
(3) $|P_\varphi \cap P_\psi| \geq 4 \Rightarrow P_\varphi = P_\psi$,
(4) $|P_\varphi \cap P_\psi| \leq 1 \Rightarrow |P_{\varphi^2} \cap P_\psi| \geq 4 \Rightarrow P_\varphi \cap P_\psi = \emptyset$,

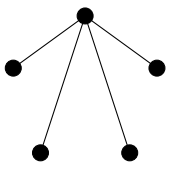
Definujme množiny

$$P_1 = P_{(12345)},\ P_2 = P_{(14235)},\ P_3 = P_{(14352)},\ P_4 = P_{(13254)},\ P_5 = P_{(13425)},\ P_6 = P_{(13542)},$$



P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6

Položme $X = Z \cup \{0\}$ a $\forall i \in Y$:

$F_i = \{\{i,a\} \mid a \in Y, a \neq i\} \cup \{0\} =$  $\cup \{0\}$,

nyní zkonstruujme symetrický $2-(11,5,2)$ design: $\mathcal{B} = \{P_i \mid i \leq 6\} \cup \{F_j \mid j \leq 5\}$

T&N. Nechť $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{P}(X_i)$, $i = 1,2$. Pak $\mathcal{B}_1 \cong \mathcal{B}_2$ (tj. systémy jsou izomorfní), pokud $\exists$ bijekce $b : X_1 \to X_2$, pro níž $\mathcal{B}_2 = \{b(B) \mid B \in \mathcal{B}_1\}$.

Fakt 8.2. Systém $\mathcal{B}$ z předchozí konstrukce je až na izomorfismus jediný symetrický $2-(11,5,2)$ design.

Důsledek 8.3. $\mathcal{C} = \{X \setminus B \mid B \in \mathcal{B}\}$ pro $\mathcal{B}$ z předchozí konstrukce tvoří až na izomorfismus jediný symetrický $2-(11,6,3)$ design.

Důkaz. Definujme zobrazení $c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ vztahem $c(A) = X \setminus A$ a označme M incidenční matici $\mathcal{B}$, N incidenční matici $\mathcal{C}$ a $J = (1) \in \mathbb{Z}^{11\times 11}$ matici sestávající ze samých hodnot 1. Potom vidíme, že $N = J - M$ a snadno spočítáme

$$N \cdot N^T = J^2 - JM - MJ + MM^T = 11J - 5J - 5J + MM^T = J + MM^T.$$

Podobně $N^T \cdot N = J + M^T M = J + MM^T$, proto

$$N \cdot N^T = N^T \cdot N = J + \begin{pmatrix} 5 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 5 & \dots & 2 \\ . & . & \dots & . \\ 2 & 2 & \dots & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 6 & \dots & 3 \\ . & . & \dots & . \\ 3 & 3 & \dots & 6 \end{pmatrix}$$

a $\mathcal{C}$ je tudíž symetrický $2-(11,6,3)$ design.

Obdobně nahlédneme, že pro symetrický $2-(11,6,3)$ design $\mathcal{C}$ s incidenční maticí N platí pro incidenční maticí $M = J - N$ systému $c(\mathcal{C})$, že je $M^T M = MM^T = N^T N - J$, proto je $c(\mathcal{C})$ symetrický $2-(11,5,2)$ design. Kdybychom nyní měli dva neizomorfní symetrické $2-(11,6,3)$ designy, pak by je bijekce c převedla na neizomorfní $2-(11,5,2)$ designy. Proto jsou i $2-(11,6,3)$ designy určeny až na izomorfismus jednoznačně. □

T&N. Nechť N je incidenční matice $2-(11,6,3)$ designu a uvažujme blokové matice

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & & & \\ . & . & \dots & . & . & & N & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & & & \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & & & \\ . & . & \dots & . & & N & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & & & \end{pmatrix},$$

kde $E \in \mathbb{F}_2^{12\times 24}$ sestává s bloku s jednotkovou maticí I_{12} a dále s bloku tvořeným maticí N s řádkem nad a sloupcem vlevo obsahujícím na první souřadnici 0 a jinde 1 a $G \in \mathbb{F}_2^{12\times 24}$ vznikne z E vypuštěním 13. sloupce.

Dále $\mathcal{E}$ buď $[24,12]_2$-kód s generující maticí E a $\mathcal{G}$ $[23,12]_2$-kód s generující maticí G.

Je-li $\mathcal{C}$ blokový kód délky n a $f_i = |\{\mathbf{v} \in \mathcal{C} \mid w(w) = i\}|$, pak se polynom $f_\mathcal{C} = \sum_{i=0}^n f_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ nazývá *váhový polynom* kódu $\mathcal{C}$.

1 bude značit slovo sestávající ze samých souřadnic 1.

Pozorování. Protože $V_2(23,3) = \sum_{i=0}^3 \binom{23}{i} = 1 + 23 + 23 \cdot 11 + 23 \cdot 77 = 2048 = 2^{23-12}$, je binární kód délky 23, velikosti 2^{12} a vzdálenosti 7 3-perfektní. Pokud takový kód $\mathcal{C}$ obsahuje slovo **0** má váhový polynom $f_\mathcal{C} = 1 + 253x^7 + 506x^8 + 1288x^{11} + 1288x^{12} + 506x^{15} + 253x^{16} + x^{23}$.

Pro spočítání váhového polynomu snadno sestavíme rekurentní vztah pro jednotlivé koeficienty (návod viz skripta Aleše Drápala).

T&N. Kód $\mathcal{C}$ je *dvojnásobně sudý*, jestliže 4 dělí $w(\mathbf{u})$ $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{C}$.

Poznámka 8.4. Nechť $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \dots \\ \mathbf{c}_k \end{pmatrix}$ je generující matice samoortogonálního $[n,k]_2$-kódu $\mathcal{C}$, pak $\mathcal{C}$ je dvojnásobně sudý $\Leftrightarrow$ 4 dělí $w(\mathbf{c}_i)$ $\forall i \le k$.

Důkaz. ($\Rightarrow$) Řádky matice $\mathbf{C}$ jsou kódová slova, proto je jejich váha dělitelná 4.

($\Leftarrow$) $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{C}\ \exists!\ I \subseteq \{1, \ldots, k\}$, pro kterou $\mathbf{u} = \sum_{i \in I} \mathbf{c}_i$, označme $\delta(\mathbf{u}) = |I|$. Dokážeme tvrzení, že 4 dělí $w(\mathbf{u})$, indukcí podle $\delta = \delta(\mathbf{u})$.

Pro $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$ splňující $\delta(\mathbf{u}) = 0$ není co dokazovat, a pokud $\delta(\mathbf{u}) = 1$, pak $\exists i : \mathbf{u} = \mathbf{c}_i$, tedy $4|w(\mathbf{u})$ podle předpokladu.

Nechť tvrzení platí pro $\delta > 0$ a $\delta(\mathbf{u}) = \delta + 1$.

Pak $\exists \mathbf{v}, \mathbf{c} \in \mathcal{C}$, pro něž $\delta(\mathbf{v}) = \delta$, $\delta(\mathbf{c}) = 1$ a $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{c}$.

Z předpokladu samoortogonality plyne, že $\mathbf{v} \cdot \mathbf{c} = 0$, proto je $w(\mathbf{v} \cap \mathbf{c})$ sudá. Z indukčního předpokladu víme, že $4|w(\mathbf{v})$ i $4|w(\ \mathbf{c})$, proto

$$4 \text{ dělí } w(\mathbf{v}) + w(\mathbf{c}) - 2w(\mathbf{v} \cap \mathbf{c}) = w(\mathbf{v} + \mathbf{c}) = w(\mathbf{u}).$$

□

Poznámka 8.5. $\mathcal{E}$ je samoduální dvojnásobně sudý $[24, 12, 8]_2$-kód a $\mathcal{G}$ je 3-perfektní $[23, 12, 7]_2$-kód.

Důkaz. Označme si řádky matice E po řadě $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{12}$ a všimněme si s využitím vlastností matice N plyne, že $w(\mathbf{u}_1) = 12$, $w(\mathbf{u}_i) = 8$, $w(\mathbf{u}_1 \cap \mathbf{u}_i) = 6\ \forall i > 1$ a $w(\mathbf{u}_i \cap \mathbf{u}_j) = 4$ $\forall i > j > 1$.

Protože $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0\ \forall i, j$ a $|\mathcal{E}| = 2^{12}$, je $\mathcal{E}$ samoduální a podle 8.4 dvojnásobně sudý. Předpokládejme ke sporu, že $d(\mathcal{E}) = 4$, tj. $\exists I \subset \{1, \ldots, 12\}$, pro něž $\mathbf{v} = v_1 \ldots v_{24} = \sum_{i \in I} \mathbf{u}_i$ a $w(\mathbf{v}) = 4$. Označme $A = \{i \leq 12 \mid v_i = 1\}$ a $a = |A| \Rightarrow a \leq w(\mathbf{v}) = 4$, $a > 1$ a $a = |I|$.

Uvážíme-li kontrolní matici $\mathcal{E}$ podle 2.2:

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & & & & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & & N^T & & . & . & \ldots & . \\ 1 & & & & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_1 \\ \tilde{\mathbf{u}}_2 \\ \ldots \\ \tilde{\mathbf{u}}_{12} \end{pmatrix}.$$

mají slova $\tilde{\mathbf{u}}_i$ stejné vlastnosti jako slova $\mathbf{u}_i$, protože je N^T rovněž incidenční matice symetrického $2 - (11, 6, 3)$ designu.

$\mathcal{E}$ je samoduální $\Rightarrow \tilde{E}$ je generujíc matice $\mathcal{E} \Rightarrow \exists \tilde{I} \subset \{1, \ldots, 12\}$, pro něž $\mathbf{v} = \sum_{i \in \tilde{I}} \tilde{\mathbf{u}}_i$. Pak platí $a = 4 - |\tilde{I}| > 1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \exists i \neq j$, pro něž

$$4 = w(\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j) = w(\mathbf{u}_i) + w(\mathbf{u}_j) - 2w(\mathbf{u}_i \cap \mathbf{u}_j)) = 8,$$

což je spor.

Protože $w(\mathbf{u}_2) = 8$ a $\mathcal{E}$ je dvojnásobně sudý, dostáváme, že $\mathcal{E}$ je vzdálenosti 8.

Protože $\mathcal{G}$ vznikne z $\mathcal{E}$ propíchnutím v 13. souřadnici, jedná se podle Pozorování o 3-perfektní $[23, 12, 7]_2$-kód. □

Věta 8.6. Až na permutační ekvivalenci existuje právě jeden $[24, 12, 8]_2$-kód, který je samoduální, dvojnásobně sudý a obsahuje slova váhy 12 a 24. Kód je permutačně ekvivalentní $\mathcal{E}$ a jeho propíchnutí v kterékoli souřadnici je permutačně ekvivalentní $\mathcal{G}$.

Důkaz. Existence plyne z 8.5.

Nechť $\mathcal{C}$ splňuje předpoklady tvrzení. Pak $\exists \mathbf{u} \in \mathcal{C}$ váhy $12 \Rightarrow \mathbf{1}, \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{1} + \mathbf{u} \in \mathcal{C} \Rightarrow w(\mathbf{u}) = w(\tilde{\mathbf{u}}) = 12$. BÚNO (tj. permutujeme souřadnice)

$\mathbf{u} = 0\ldots01\ldots1$ a $\tilde{\mathbf{u}} = 1\ldots10\ldots0$ a propichovanou souřadnici nastavíme jako první. Nechť $I = \{13, \ldots, 24\}$ a $\pi_I : \mathbb{F}^{24} \to \mathbb{F}^{12}$ je propíchnutí v souřadnicích I.

Nechť $\mathbf{v} \in \mathcal{C} \setminus \{\mathbf{0}\}$ a $\pi_I(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \Rightarrow$

$$w(\mathbf{u}+\mathbf{v}) + w(\mathbf{v}) = 12, w(\mathbf{v}) \geq 8 \Rightarrow w(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \leq 4 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v} \Rightarrow$$

$\mathrm{Ker}\pi_I = \{\mathbf{0}, \mathbf{u}\}$. Protože $\tilde{\mathbf{u}}\mathbf{c} = 0\ \forall \mathbf{c} \in \mathcal{C}$ je $\pi_I(\mathcal{C})$ $[12, 11]_2$-kód s kontrolní maticí $\nVdash \in \mathbb{F}_2^{1\times 12}$ $\Rightarrow \mathcal{C}$ má generujíc matic tvaru

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & & & & 0 & & & \\ . & & I_{11} & & . & & M & \\ 1 & & & & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Vyměníme-li její 1. a 13. sloupec dostaneme generující matici

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 1 & & & \\ . & . & \ldots & . & . & & M & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & & & \end{pmatrix},$$

permutačně ekvivalentního kódu $\tilde{\mathcal{C}}$. Nyní díky 8.3 stačí ukázat, že je M incidenční matice $2-(11, 6, 3)$ designu.

Označme řádky matice $\tilde{C}$ po řadě $\mathbf{c}_0, \ldots, \mathbf{c}_{11}$ a řádky matice M $\mathbf{v}_1, \ldots, v_{11}$.

$\mathcal{C}$ dvojnásobně sudý $\Rightarrow 4$ dělí $w(\mathbf{c}_i)$ i $w(\mathbf{c}_i + \mathbf{c}_j)$ a $d(\mathcal{C}) = 8 \Rightarrow w(\mathbf{u}_i), w(\mathbf{u}_i + uu_j) \in \{6, 10\}$.

Kdyby $w(\mathbf{u}_i) = 10 \Rightarrow w(\mathbf{c}_i + \mathbf{u}) = 2 + 2 = 4$, což je spor.

Kdyby $w(\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j) = 10 \Rightarrow w(\mathbf{c}_i + \mathbf{c}_j + \mathbf{u}) = 2 + 2 = 4$, což je opět spor.

Proto pro $i \neq j$

$$6 = w(\mathbf{u}_i) = w(\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j) = w(\mathbf{u}_i) + w(\mathbf{u}_j) - 2w(\mathbf{u}_i \cap \mathbf{u}_j) \Rightarrow w(\mathbf{u}_i \cap \mathbf{u}_j) = 3.$$

Totéž lze dokázat i pro matici M^T, neboť

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & & & & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & & M^T & & . & . & \ldots & . \\ 1 & & & & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

je rovněž je generujíc matice kódu $\tilde{\mathcal{C}}$.

Tedy M je incidenční matice symetrického $2-(11, 6, 3)$ designu, která je podle 8.3 určena až na permutaci řádků a sloupců jednoznačně. □

Zbytek kapitoly se v akademickém roce 2021/22 nebude přednášet ani zkoušet.

Poznámka 8.7. Nechť $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^{2k}$, kde $k = \log_2 |\mathcal{C}|$. Jestliže buď

(a) $\mathcal{C}$ je samoortogonální nebo

(b) $\mathbf{0} \in \mathcal{C}$ a $\mathbf{u} + \mathcal{C}$ je pro každé $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$ dvojnásobně sudý,

pak je $\mathcal{C}$ samoduální a tedy lineární kód.

Důkaz. Nechť platí (a). Pak $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{LO}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}^\perp \subseteq (\mathrm{LO}(\mathcal{C}))^\perp \Rightarrow 2^k = |\mathcal{C}| \leq |\mathrm{LO}(\mathcal{C})| \Rightarrow \dim(\mathrm{LO}(\mathcal{C})) \geq k \Rightarrow \dim((\mathrm{LO}(\mathcal{C}))^\perp) \leq k \Rightarrow 2^k = |\mathcal{C}| \leq |\mathrm{LO}(\mathcal{C})| \leq |(\mathrm{LO}(\mathcal{C}))^\perp)| \leq 2^k$. Proto $\mathcal{C} = \mathrm{LO}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}^\perp$.

Předpokládejme, že platí (b). Stačí nám ověřit platnost (a).

Všimněme si, že pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{C}$ máme podle předpokladů, že 4 dělí $w(\mathbf{u}) = w(\mathbf{0}+\mathbf{u})$, $w(\mathbf{v}) = w(\mathbf{0}+\mathbf{v})$ i $w(\mathbf{u}+\mathbf{v})$. Proto

$$2w(\mathbf{u} \cap \mathbf{v}) = w(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - w(\mathbf{u}) - w(\mathbf{v}) \ \Rightarrow 2 \text{ dělí } w(\mathbf{u} \cap \mathbf{v}).$$

Odtud vidíme, že $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, tedy $\mathcal{C}$ je samoortogonální. □

Věta 8.8. Až na permutační ekvivalenci existují jednoznačně určené binární kódy $\tilde{\mathcal{G}}$ a $\tilde{\mathcal{E}}$ velikosti 2^{12} obsahující nulové slovo, první délky 23 a vzdálenosti 7 a druhý délky 24 a vzdálenosti 8. Tyto kódy jsou nutně lineární a platí, že $\tilde{\mathcal{G}}$ je permutačně ekvivalentní $\mathcal{G}$, $\tilde{\mathcal{E}}$ je permutačně ekvivalentní $\mathcal{E}$ a $f_{\mathcal{E}} = 1 + 759x^8 + 2576x^{12} + 759x^{16} + x^{24}$.

Důkaz. Existence plyne z 8.5.

Nechť $\pi_i : \mathbb{F}_2^{24} \to \mathbb{F}_2^{23}$ označuje propíchnutí v i-té souřadnici. Pak je $\pi_i(\tilde{\mathcal{E}})$ kód velikosti 2^{12} obsahující nulové slovo a podle Pozorování je vzdálenosti 7 a tedy 3-perfektní a $f_{\pi_i(\tilde{\mathcal{E}})} = 1 + 253x^7 + 506x^8 + 1288x^{11} + 1288x^{12} + 506x^{15} + 253x^{16} + x^{23}$.

Protože $\forall \mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{E}} \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}\ \exists j, k \leq 24$ splňující $w(\pi_j(\mathbf{u})) = w(\pi_k(\mathbf{u})) - 1$. Kód $\tilde{\mathcal{E}}$ neobsahuje slovo váhy 7, tedy všechna slova váhy 7 kódu $\pi_i(\tilde{\mathcal{E}})$ vznikla ze slov délky 8. Kdyby $\tilde{\mathcal{E}}$ obsahoval slovo váhy 11, 15 nebo 23, pak by pro vhodném i obsahoval kód $\pi_i(\tilde{\mathcal{E}})$ slovo stejné váhy, což neplatí. Podobně $\tilde{\mathcal{E}}$ nemůže obsahovat slova váhy 9, 13, ani 17. Proto $f_{\tilde{\mathcal{E}}} = 1 + 759x^8 + 2576x^{12} + 759x^{16} + x^{24} \Rightarrow \tilde{\mathcal{E}}$ je dvojnásobně sudý $\Rightarrow \mathbf{v} + \tilde{\mathcal{E}}$ má stejné parametry, tudíž je dvojnásobně sudý $\forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{E}} \Rightarrow \tilde{\mathcal{E}}$ je lineární samoduální kód podle 8.7 $\tilde{\mathcal{E}}$ je permutačně ekvivalentní $\mathcal{E}$ podle 8.6.

Splňuje-li $\tilde{\mathcal{G}}$ předpoklady tvrzení, pak kód $\hat{E} = \{c_1 \dots c_{23} \sum_i c_i \mid c_1 \dots c_{23} \in \tilde{\mathcal{G}}\}$ má délky 24 a vzdálenosti 8 mohutnosti 2^{12} slov a obsahuje $\mathbf{0} \Rightarrow \hat{E}$ je permutačně ekvivalentní $\mathcal{E}$. Protože $\pi_{24}(\hat{E}) = \tilde{\mathcal{G}}$ je podle 8.6 permutačně ekvivalentní $\mathcal{G}$.

Zbytek plyne z 8.5. □

Důsledek 8.9. Je-li $\mathcal{C}$ binární kód velikosti 2^{12} délky 23 a váhy 7, pak $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{C}$ je kód $\mathbf{u} + \mathcal{C}$ permutačně ekvivalentní $\mathcal{G}$.

9. Konvoluční kód a konvoluční kódovač

V celé kapitole předpokládáme, že $\mathbb{F}$ je konečné těleso a D neznámá.

T&N. Na množině formálních *Laurentových řad* $\mathbb{F}((D)) = \{\sum_{i\geq r} u_i D^i \mid r \in \mathbb{Z}, u_i \in \mathbb{F}\}$ uvažujme obvyklé operace

$$\sum_{i\geq r} u_i D^i \pm \sum_{i\geq s} v_i D^i = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (u_i \pm v_i) D^i, \quad \sum_{i\geq r} u_i D^i \cdot \sum_{i\geq s} v_i D^i = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{i-k} D^i,$$

kde položíme $u_i = v_j = 0 \ \forall i < r, j < s$. Dále značme:
$\mathbb{F}[[D]] = \{\sum_{i\geq 0} u_i D^i \mid u_i \in \mathbb{F}\}$ - formální *mocninné řady*,
$\mathbb{F}[D] = \{\sum_{i=0^n} u_i D^i \mid n \in \mathbb{N}, u_i \in \mathbb{F}\}$ - *polynomy*,
$\mathbb{F}[D^{-1}] = \{\sum_{i=0^n} u_i D^{-i} \mid n \in \mathbb{N}, u_i \in \mathbb{F}\}$ - *inverzní polynomy*,
$\mathbb{F}[D, D^{-1}] = \{\sum_{i=k^n} u_i D^i \mid k \in Z, n \in \mathbb{N}, u_i \in \mathbb{F}\}$ - *Laurentovy polynomy*.

Poznámka 9.1. $\mathbb{F}((D))$ tvoří s výše zavedenými operacemi komutativní těleso a $\mathbb{F}[D], \mathbb{F}[D^{-1}] \subset \mathbb{F}[D, D^{-1}] \subset \mathbb{F}[[D]]$ jsou jeho podokruhy.

Důkaz. □

Definice. Podílovému tělesu $\mathbb{F}(D) = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{F}[D], q \neq 0\}$ oboru $\mathbb{F}[D]$ říkáme *racionální funkce*, racionální funkce $f \in \mathbb{F}(D)$ je *realizovatelná*, pokud $f = \frac{p}{q}$ pro polynom p a polynom s nenulovým absolutním členem q.

Pozorování. Uvažujme zobrazení $\nu : \mathbb{F}(D) \to \mathbb{F}((D))$ dané vztahem $\nu(\frac{p}{q}) = p \cdot q^{-1}$.

(1) ν je prostý okruhový homomorfismus,
(2) $f \in F(D)$ je realizovatelná $\Leftrightarrow \nu(f) \in \mathbb{F}[[D]]$

Nadále budeme ztotožňovat prvky $\mathbb{F}(D)$ a $\nu(\mathbb{F}(D))$ a prvkům $\nu(\mathbb{F}(D)) \cap \mathbb{F}[[D]]$ budeme říkat *realizovatelné řady*.

T&N. Pro $c \in \mathbb{N}$ označme $\mathbb{F}^c((D)) = \{\sum_{i\geq r} \mathbf{u}_i D^i \mid r \in \mathbb{Z}, \mathbf{u}_i \in \mathbb{F}^c\}$, kde souřadnice značíme horními indexy $\mathbf{u}_i = u_i^{(1)} \dots u_i^{(c)}$.

Pozorování. Pro $c \in \mathbb{N}$ platí, že

(1) $\mu : \mathbb{F}^c((D)) \to \mathbb{F}((D))^c$ dané vztahem $\mu(\sum_{i\geq r} \mathbf{u}_i D^i) = (\sum_{i\geq r} u_i^{(1)} D^i, \dots, \sum_{i\geq r} u_i^{(c)} D^i)$ je bijekce,
(2) $\mathbb{F}^c((D))$ tvoří se sčítáním a násobením skalárem po koeficientů stejného monomu D^i vektorový prostor, pro který je μ izomorfismus vektorových prostorů (zároveň jde o modul nad $\mathbb{F}[D]$, $\mathbb{F}[D^{-1}]$ $\mathbb{F}[[D]]$ i $\mathbb{F}[D, D^{-1}]$.

Na základě předchozího pozorování budeme nadále ztotožňovat prvky prostory $\mathbb{F}^c((D))$ a $\mathbb{F}((D))^c$.

Definice. Je-li $B \subset \mathbb{F}((D))^c$ nazveme $\mathcal{C} = LO(B) \subseteq \mathbb{F}((D))^c$ *konvoluční kód* s parametry (c, k), pokud $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{C} = k$. Každou matici $G \in (\mathbb{F}(D) \cap \mathbb{F}[[D]])^{k\times c}$, jejíž řádky tvoří bázi $\mathcal{C}$, nazveme *generující maticí* konvolučního kódu $\mathcal{C}$. Pokud $G \in \mathbb{F}[D]^{k\times c}$ mluvíme o *polynomiální* generující matici.

Poznámka 9.2. Je-li $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}((D))^c$ konvoluční kód, pak

(1) $\exists$ polynomiální generující matice $\mathcal{C}$,
(2) Je-li $G = (g_{ij})$ generující matice $\mathcal{C}$, pak
   (a) $\exists$ polynomy $p_{ij}, q_i \in \mathbb{F}[D]$: $q_i(0) = 1$, $\mathrm{NSD}(p_{i1}, \ldots, p_{ic}, q_i) = 1$ a $g_{ij} = \frac{p_{ij}}{q_i}$ $\forall i, j$,
   (b) $\exists$ polynomy $\tilde{p}_{ij}, q \in \mathbb{F}[D]$: $q(0) = 1$, $\mathrm{NSD}(\{\tilde{p}_{ij} \mid i, j\} \cup \{q\}) = 1$ a $g_{ij} = \frac{p_{ij}}{q}$ $\forall i, j$,
(3) všechny polynomy z (2) jsou maticí G určeny jednoznačně.

Důkaz. □

T&N. Uvážíme-li vyjádření generující matice $G = (\frac{p_{ij}}{q_j})$ konvolučního kódu z 9.2(2a), pak definujme $\nu_i = \max(\deg(p_{i1}), \ldots, \deg(p_{ic}), \deg(q_i))$ a $\mathrm{extdeg}(G) = \sum_{i=1}^{k} \nu_i$ je *vnější stupeň* matice G.

Věta 9.3. Jsou-li G a $\tilde{G}$ dvě generující matice konvolučního kódu $\mathcal{C}$ s minimálním vnějším stupněm $\nu = \sum_{i=1}^{k} \nu_i = \sum_{i=1}^{k} \tilde{\nu}_i$, kde ν_i a $\tilde{\nu}_i$ jsou zavedeny stejně jako výše a $\nu_1 \leq \cdots \leq \nu_k$ a $\tilde{\nu}_1 \leq \cdots \leq \tilde{\nu}_k$, pak $\nu_i = \tilde{\nu}_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, k$.

Důkaz. □

Definice. Hodnoty ν_i z předchozí věty se nazývají *Forneyho indexy* a $\deg \mathcal{C} = \sum_{i=1}^{k} \nu_i$ je stupeň konvolučního kódu $\mathcal{C}$.

Je-li G generující matice konvolučního kódu $\mathcal{C}$ s parametry (c, k), pak zobrazení $K : \mathbb{F}((D))^k \to \mathbb{F}((D))^c$ dané podmínkou$K(\mathbf{u}) = \mathbf{u}G$ nazveme *konvoluční kódovač* a dvojici (K, G) *fyzický konvoluční kódovač.*

Pozorování. Je-li (K, G) fyzický konvoluční kódovač pro $G = (\frac{p_{ij}}{q_i})$ generující matice konvolučního kódu $\mathcal{C}$ s parametry (c, k) a $\mathbf{u} = \sum_i \mathbf{u}_i D^i \in \mathbb{F}((D))^k$, pak

(1) $K(\mathbb{F}((D))^k) = \mathcal{C}$ a K je prosté lineární zobrazení,
(2) $\mathbf{v}^{(j)} = \sum_i \mathbf{v}_i^{(j)} D^i = \sum_{s=1}^{k} \mathbf{u}^{(s)} \frac{p_{sj}}{q_s}$ pro $\mathbf{v} = \sum_i \mathbf{v}_i D^i = K(\mathbf{u})$.

Příklad 9.4. Uvážíme fyzický konvoluční kódovač (K, G) pro generující matici $G = \begin{pmatrix} 1 + D^2 & 1 + D + D^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2[D]^{1\times 2}$. Nechť $u = \sum_i u_i D^i \in \mathbb{F}_2((D))$, potom

$$K(u) = \sum_i u_i D^i \begin{pmatrix} 1 + D^2 & 1 + D + D^2 \end{pmatrix} = (\sum_i (u_i + u_{i-2} D^i, \sum_i (u_i + u_{i-1} + u_{i-2} D^i).$$

Definice. Nechť $n, k, m \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $z \in \mathbb{Z}$ a uvažme matice $P \in \mathbb{F}^{m\times m}$, $Q \in \mathbb{F}^{k\times m}$, $R \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $S \in \mathbb{F}^{k\times n}$ a zobrazení $\delta : \mathbb{F}^m \times \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^m$ a $\lambda : \mathbb{F}^m \times \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^n$ daná předpisem $\delta(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}P + \mathbf{u}Q$ a $\lambda(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}R + \mathbf{u}S$. Buď $\mathbf{u} = \sum_{i \geq z} \mathbf{u}_i D^i \in \mathbb{F}((D))^k$ a $\mathbf{s}_z = \mathbf{0} \in \mathbb{F}^m$ a definujme $\mathbf{s}_{i+1} = \delta(\mathbf{s}_i, \mathbf{u}_i)$, $\mathbf{v}_{i+1} = \lambda(\mathbf{s}_i, \mathbf{u}_i)$ $\forall i \geq z$ a $K(\mathbf{u}) = \sum_i \mathbf{v}_i D^i$. Je-li zobrazení K prosté, potom trojici (K, δ, λ) nazveme *abstraktní konvoluční kódovač* s přechodovou funkcí δ a výstupní funkcí λ s parametry (n, k, m). $\mathbb{F}^m$ se nazývá stavový prostor.

Pozorování. Nechť (K, δ, λ) je abstraktní konvoluční kódovač s parametry (n, k, m), pak $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{F}((D))^k$

(1) K je $\mathbb{F}$-lineární a $K(\mathbf{u}D) = K(\mathbf{u})D$,

(2) $\forall p, q \in \mathbb{F}[D] \setminus \{0\}$ máme $K(\mathbf{u}p) = K(\mathbf{u})p$ a $K(\mathbf{u}\frac{p}{q})q = K(\mathbf{u}p)$, proto $K(\mathbf{u}\frac{p}{q}) = K(\mathbf{u})\frac{p}{q}$,
(3) pokud $k = 1$ a $\mathbf{u} \in \mathbb{F}(D)$, pak $K(\mathbf{u}) = K(1)\mathbf{u}$.

Příklad 9.5. Konvoluční kódovač K z 9.4 lze popsat jako abstraktní konvoluční kódovač (K, δ, λ) $(2, 1, 2)$, kde $\delta(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}P + \mathbf{u}Q$ a $\lambda(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \mathbf{s}R + \mathbf{u}S$ pro matice

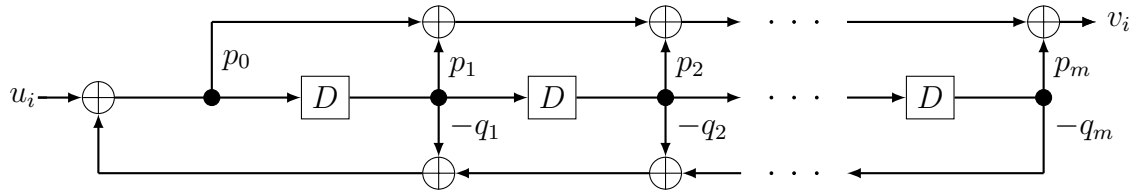
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poznámka 9.6. Nechť $m \in \mathbb{N}$, $p = \sum_{i=0}^{m} p_i D^i \neq 0$, $q = 1 + \sum_{i=1}^{m} q_i D^i$ a $K : \mathbb{F}((D)) \to \mathbb{F}((D))$ je dána předpisem $K(u) = u\frac{p}{q}$. Definujme $\delta : \mathbb{F}^m \times \mathbb{F}^1 \to \mathbb{F}^m$ a $\lambda : \mathbb{F}^m \times \mathbb{F}^1 \to \mathbb{F}^1$ daná předpisem $\delta(\mathbf{s}, u) = (u - \sum_{j=1}^{m} q_j \mathbf{s}^{(j)}, \mathbf{s}^{(1)}, \ldots, \mathbf{s}^{(m-1)})$ a $\lambda(\mathbf{s}, u) = p_0 u + \sum_{j=1}^{m}(p_j - p_0 q_j)\mathbf{s}^{(j)}$. Potom

(1) $(K, (\frac{p}{q}))$ je fyzický konvoluční kódovač,
(2) $\delta(\mathbf{s}, u) = \mathbf{s} \begin{pmatrix} -q_1 & & \\ \cdot & & I_{11} \\ -q_{m-1} & & \\ -q_m & 0 \ \ldots \ 0 & \end{pmatrix} + u(1, 0, \ldots, 0)$, $\lambda(\mathbf{s}, u) = \mathbf{s} \begin{pmatrix} p_1 - p_0 q_1 \\ \ldots \\ p_m - p_0 q_m \end{pmatrix} + u(p_0)$
(3) a (K, δ, λ) je abstraktní konvoluční kódovač.

Důkaz. □

T&N. Je-li p, q jako v 9.6, $u = \sum_{i \geq z} u_i D^i \in \mathbb{F}((D))$ a $v = \sum_{i \geq z} v_i D^i = u \cdot \frac{p}{q}$, pak je konvoluce $uu \cdot \frac{p}{q}$ realizována obvodem



Za šablonu obvodu děkuji Adamu Klepáčovi.

Věta 9.7. Abstraktní konvoluční kódovač lze ralizovat jako fyzický konvoluční kódovač a naopak.

Důkaz. □

Příklad 9.8. (1) Aplikujme důkaz 9.7 na abstraktní konvoluční kódovač K z 9.5 s maticemi

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\tilde{G} = D \cdot Q \cdot (I_2 - DP)^{-1} \cdot R + S = D \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -D \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + D^2 & 1 + D + D^2 \end{pmatrix}.$$

Tedy $\tilde{G} = G$ z 9.4.

(2) Pro polynomiální matici $G = \begin{pmatrix} 1 & 1+D+D^2 & 1+D^2 & 1+D \\ 0 & 1+D+D^2 & D^2 & 1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{F}_2$ určíme $\mathrm{extdeg} G = 2+2 = 4$ a spočítáme z důkazu předchozí věty matice určující abstraktní konvoluční kódovač pro fyzický kódovač $K(u) = uG$:

$$P_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{proto} \quad P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Pro generující matici $\tilde{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1+D+D^2 & 1+D^2 & 1+D \\ 0 & 1+D+D^2 & D^2 & 1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{F}_2$ téhož konvolučního kódu jako v (2) opět spočítáme $\mathrm{extdeg}\tilde{G} = 2+1 = 3$ a matice určující abstraktní konvoluční kódovač pro $\tilde{K}(u) = u\tilde{G}$:

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Pro generujíc matici $G = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+D+D^2} & \frac{1+D}{1+D+D^2} \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{F}_2$ vidíme, že $\mathrm{extdeg} G = 2$ a opět standardně spočítáme matice určující odpovídající abstraktní konvoluční kódovač:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0-1\cdot 1 & 1-1\cdot 1 \\ 0-1\cdot 1 & 0-1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Polynomiální generující matice

T&N. Nechť $A \in \mathbb{F}[D]^{n\times n}$ $C, M \in \mathbb{F}[D]^{k\times n}$. Řeknem, že je matice A *unimodulární*, pokud $\exists A^{-1} \in \mathbb{F}[D]^{n\times n}$. Jsou-li L a P unimodulární matice a $M = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \delta_k & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ pro $\delta_i | \delta_{i+1}$ v $\mathbb{F}[D]$ pro všechna $i = 1, \dots, k-1$, pak $C = LMP$ nazveme *Smithův rozklad* matice C, kde M je *Smithova normální forma* (SNF) matice C.

Pozorování. Je-li $A \in \mathbb{F}[D]^{n\times n}$ a $p \in \mathbb{F}[D]$, pak

(1) A je unimodulární $\Leftrightarrow \det A \in \mathbb{F}^*$,
(2) elementární matice přičtení p násobku řádku k jinému je unimodulární,
(3) jsou-li $a, b \in \mathbb{F}[D]$ nesoudělné, existuje $u, v \in \mathbb{F}[D]$, pro něž $ua + bv = 1$, proto je matice $\begin{pmatrix} a & -v \\ b & u \end{pmatrix}$ unimodulární.

Příklad 10.1. Pro $A = \begin{pmatrix} 1+D & -D \\ D & 1-D \end{pmatrix}$ je $\det A = 1$, proto $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1-D & D \\ -D & 1+D \end{pmatrix}$. Potom SNF matice C je I_2 a její Smithův rozklad je například tvaru $A = A \cdot I_2 \cdot I_2 = I_2 \cdot I_2 \cdot A$.

Poznámka 10.2. Polynomiální matice má nějaký Smithův rozklad a její SNF je určen jednoznačně.

Důkaz. □

Příklad 10.3. Spočítáme Smithův rozklad matice $G = \begin{pmatrix} 1+D^2 & 1+D^3 & 11+D^2 \\ 1+D & 1+D^2 & 1+D \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{F}_2$:

...

V následujícím bude matice $G = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \dots \\ \mathbf{g}_k \end{pmatrix} \in \mathbb{F}[D]^{k\times n}$ pro $\mathbf{g}_i = (g_{i1}, \dots, g_{in}) \in \mathbb{F}[D]^n$, $\nu_i = \deg \mathbf{g}_i$, kde $\deg \mathbf{g}_i = \max(\deg g_{i1}, \dots, \deg g_{in})$.

T&N. Číslo $\mathrm{intdeg}G = \max(\deg\det(H) \mid H \in \mathbb{F}[D]^{k\times k}$ vznikne vypuštěním $n-k$ sloupců z$G)$ se nazývá *vnitřní stupeň* G. Pro $\tilde{G} \in \mathbb{F}[D]^{k\times n}$ platí, že $\tilde{G} \sim G$, pokud $\exists T \in \mathbb{F}(D)^{k\times k}$ invertibilní, pro kterou $TG = \tilde{G}$. Řekneme, že G je *základní*, pokud $\mathrm{intdeg}G = \min(\mathrm{intdeg}\tilde{G} \mid \tilde{G} \in \mathbb{F}[D]^{k\times n}, \tilde{G} \sim G)$.

Pozorování.

Poznámka 10.4. Následující je pro matici G ekvivalentní:

(1) G je základní,
(2) SNF matice G je tvaru $(I_k|0)$,
(3) G lze doplnit $n-k$ polynomiálními řádky na unimodulární matici,
(4) $\exists R \in \mathbb{F}[D]^{n\times k}$, pro niž $GR = I_k$.

Důkaz. □

11. Viterbiho algoritmus