5. Diagonalizovatelnost a Jordanův normální tvar

5.1. Rozhodněte, zda existuje báze, a existuje-li nejděte ji, vůči níž má endomorfismus φ diagonální matici, jestliže

(a) φ je endomorfismus na $\mathbf{R}^2$ s maticí $[\varphi]_{K_2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_2,

(b) φ je endomorfismus na $\mathbf{R}^3$ daný předpisem $\varphi(x,y,z) = (x+2y+z, 2x-y+2z, -2y)$,

(c) φ je endomorfismus na $\mathbf{Z}_5^3$ s maticí $[\varphi]_{K_3} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_3

(d) φ je endomorfismus na $\mathbf{C}^4$ daný předpisem $\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1, x_1+x_2, x_1+x_2+x_3, x_1+x_2+x_3+x_4)$.

(a) Uvážíme-li, že máme dvě různá vlastní čísla endomorfismu na prostoru dimenze 2, víme, že jde o diagonalizovatelný endomorfismus. V úloze 4.1 jsme našli dvě různá vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory, vezmem-li posloupnost složenou z jednoho vlastního vektoru příslušného ke každému vlastnímu číslu $M = ((-2,1),(1,2))$ (že to muselo nastat nám říká například Věta 17.8), snadno nahlédneme, že dostaneme bázi $\mathbf{R}^2$. Zřejmě přitom platí $[\varphi]_M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

(b) V příkladu 4.3 jsme našli vlastní čísla 0, 1 a -1 endomorfismu φ i jeho vlastní vektory $\langle(1,0,-1)\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\langle(3,1,-2)\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$ a $\langle(-2,1,2)\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$. Tedy díky Větě 17.8 je posloupnost $B = ((-2,1,2),(1,0,-1),(3,1,-2))$ tvořená vlastními vektory příslušnými různým vlastním číslům lineárně nezávislá. Proto je B báze $\mathbf{R}^3$ a $[\varphi]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) Obvyklým způsobem určíme vlastní čísla $\sigma(\varphi) = \{0,2\}$, například jako kořeny charakteristického polynomu $p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 4\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda$. Spočítáme-li řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $[\varphi]_{K_3} - \lambda\mathbf{E}$, zjistíme, že $\langle(4,1,0),(4,0,1)\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$ jsou všechny vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 2 a $\langle(1,1,1)\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$ jsou všechny vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 0, proto $C = ((4,1,0),(4,0,1),(1,1,1))$ je báze $\mathbf{Z}_5^3$ a platí, že $[\varphi]_C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) Určíme-li matici $[\varphi]_{K_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_4, okamžitě vidíme, že 1 je jediné vlastní číslo endomorfismu φ. Pro něj najdeme ovšem jen jednodimenzionální množinu vlastních vektorů $\langle(0,0,0,1)\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$, tedy z vlastních vektorů nemůžeme sestavit bázi $\mathbf{C}^4$. Proto neexistuje báze vůči níž má endomorfismus φ diagonální matici. □

5.2. Rozhodněte, zda je matice $\mathbf{A}$ podobná diagonální, a existuje-li nejděte regulární takovou matici $\mathbf{P}$ aby $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ byla diagonální, jestliže

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$,

(b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbf{R}$,

(c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbf{C}$,

(d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbf{C}$.

(a) Předně připomeňme, že jsme v příkladu 4.2 našli lineárně nezávislou posloupnost $B = ((1,0,1), (0,1,0), (1,3,4))$ složenou z vlastních vektorů. Interpretujeme-li matici $\mathbf{A}$ jako matici endomorfismu φ zhledem ke kanonické bázi a vezmeme-li matici přechodu $\mathbf{P} = [\mathrm{Id}]_{BK_3}$, pak vidíme, že $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = [\mathrm{Id}]_{K_3B}[\varphi]_{K_3}[\mathrm{Id}]_{BK_3} = [\varphi]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Tedy zjistili jsme, že $\mathbf{P} = [\mathrm{Id}]_{BK_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

26.4.

(b), (c) Obvyklým způsobem spočítáme charakteristický polynom $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = \lambda^2 + 1$. Vidíme, že nad tělesem $\mathbf{R}$ tento polynom žádný kořen nemá, tedy $\mathbf{A}$ není nad $\mathbf{R}$ podobná diagonální (ani jiné Jordanově) matici, zatímco nad tělesem $\mathbf{C}$ najdeme dvě komplexní vlastní čísla i a $-i$, proto $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

Zbývá spočítat komplexní vlastní vektory, pro vlastní číslo i dostáváme například vlastní vektor $(1, 1-i)$ a pro vlastní číslo $-i$ zvolíme vlastní vektor $(1, 1+i)$. Sepíšeme-li bázi složenou z vlastních vektorů do sloupců matice, obdržíme hledanou matici $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}$.

(d) Matice $\mathbf{A}$ je Jordanova matice, tedy je sama svým Jordanovým normálním tvarem. Podle Věty 18.22(i) je Jordanův normální tvar určen jednoznačně až na pořadí Jordanových buněk, tedy nemůže být podobný diagonální matici, která je zřejmě rovněž Jordanova. □

5.3. Spočítejte $\mathbf{A}^{20}$, jestliže

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ nad $\mathbf{Z}_5$,

(b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbf{R}$,

Uvážíme, že $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^n\mathbf{P} = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})^n$ pro libovolnou regulární matici $\mathbf{P}$, tedy $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})^n\mathbf{P}^{-1}$.

(a) Využijeme-li hodnot spočítaných v 5.2(a), dostáváme

$$\mathbf{A}^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{20} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{20} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \mathbf{PEP}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Využijeme-li hodnoty spočítané v úloze 4.3 a položíme $\mathbf{P} = [\mathrm{Id}]_{BK_3} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, pak $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^n\mathbf{P} = [\psi]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, proto

$$\mathbf{A}^{20} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{20} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

□

5.4. Buď $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ matice nad tělesem reálných čísel.

(a) Spočítejte vlastní čísla a vlastní vektory matic $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ a $\mathbf{K}$,
(b) existuje-li, najděte Jordanův normální tvar matic $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ a $\mathbf{K}$,
(c) rozhodněte, které dvojice matic $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ a $\mathbf{K}$ jsou podobné.

(a) Obvyklým způsobem snadno zjistíme, že charakteristický polynom matice $\mathbf{M}$ a $\mathbf{N}$ je $(\lambda-2)^2$ a charakteristický polynom matice $\mathbf{K}$ je $(\lambda-2)(\lambda-1)$, proto $\sigma(\mathbf{M}) = \{2\}$, $\sigma(\mathbf{N}) = \{2\}$ a $\sigma(\mathbf{K}) = \{1,2\}$. Nyní vyřešíme homogení soustavy rovnic s maticemi $\mathbf{M} - 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{N} - 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K} - 1\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{K} - 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Tedy množina vlastních vektorů matice $\mathbf{M}$ je $\langle(1,-1)\rangle \setminus \{(0,0)\}$, množina vlastních vektorů matice $\mathbf{N}$ je $\langle(1,1)\rangle \setminus \{(0,0)\}$ a množina vlastních vektorů matice $\mathbf{K}$ je $\langle(0,1)\rangle \cup \langle(2,3)\rangle \setminus \{(0,0)\}$.

(b) Poznamenejme, že se charakteristické polynomy všech tří matic rozkládají na součin kořenových činitelů, proto podle Věty 17.8 všechny matice mají Jordanův normální tvar.

Zřejmě má Jordanův normální tvar matice na diagonále právě hodnoty spektra a nad diagonálou nuly nebo jedničky. Přitom různá vlastní čísla určují různé Jordanovy buňky, proto je matice $\mathbf{K}$ diagonalizovatelná, a tudíž podobná Jordanově matici $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Matice $\mathbf{M}$ i $\mathbf{N}$ mohou být podobné pouze Jordanovým maticím $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ nebo $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, Podobnost s první z nich by ovšem znamenala, že je matice $\mathbf{M}$ či $\mathbf{N}$ diagonalizovatelná, zatímco v (a) jsme zjistili, že vlastní vektory ani matice $\mathbf{M}$ ani matice $\mathbf{N}$ netvoří bázi, tedy matice diagonalizovatelné nejsou. Tedy je Jordanův kanonický tvar matice $\mathbf{M}$ i $\mathbf{N}$ roven právě Jordanově buňce $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) Víme, že dvě podobné matice mají nutně stejná spektra, tedy matice $\mathbf{K}$ není podobná matici $\mathbf{M}$ ani $\mathbf{N}$. Na druhou stranu, dvě matice se stejným Jordanovým kanonickým tvarem jsou podobné, tedy $\mathbf{M} \sim \mathbf{N}$ □

5.5. Existuje-li, najděte Jordanův normální tvar a zjistěte, zda jsou si nad tělesem racionálních čísel podobné, matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

U obou matic snadno zjistíme, že $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = (1-\lambda)^3$ Obě tedy mají vlastní číslo 1 násobnosti 3, proto musí být podle Vět 17.8 a 18.22(i) podobné jedné z následujících matic v Jordanově normálním tvaru:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

To znamená, že existují regulární matice $\mathbf{P}_A$ a $\mathbf{P}_B$ a indexy i_A a i_B, pro něž $\mathbf{J}_{i_A} = \mathbf{P}_A^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}_A$ a $\mathbf{J}_{i_B} = \mathbf{P}_B^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}_B$. Dále si všimněme, že pro každé λ platí

$$\mathbf{P}_A^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{P}_A = \mathbf{P}_A^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}_A - \lambda\mathbf{P}_A^{-1}\mathbf{E}\mathbf{P}_A = \mathbf{J}_{i_A} - \lambda\mathbf{E}.$$

Zvolíme-li za λ vlastní číslo 1, vidíme, že matice $\mathbf{A} - 1\mathbf{E}$ a $\mathbf{J}_{i_A} - 1\mathbf{E}$ se liší jen vynásobením zprava a zleva regulární maticí, proto musí mít stejnou hodnost. Přitom snadno nahlédneme, že $h(\mathbf{J}_1 - \mathbf{E}) = h(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = 0$, $h(\mathbf{J}_2 - \mathbf{E}) = h(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = 1$ a $h(\mathbf{J}_3 - \mathbf{E}) = h(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = 2$, tedy zbývá spočítat $h(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = 2$ a $h(\mathbf{B} - \mathbf{E}) = 1$. Matice $\mathbf{A}$ nutně podobná Jordanově matici $\mathbf{J}_3$ a matice $\mathbf{B}$ je podobná Jordanově matici $\mathbf{J}_2$. Z Věty 18.22(i) potom plyne, že matice $\mathbf{J}_2$ a $\mathbf{J}_3$ nejsou podobné, proto nejsou podobné ani matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$. □

5.6. Existuje-li, najděte Jordanův normální tvar matice $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$.

Protože je matice $\mathbf{D}$ dolní trojúhelníková, okamžitě dostaneme její charakteristický polynom $(2-\lambda)^3$, tedy díky Větě 17.8 víme, že Jordanův normální tvar matice $\mathbf{D}$ existuje. Postupujeme-li stejně jako v úloze 5.5, zjistíme, že $h(\mathbf{D} - 2\mathbf{E}) = h(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}) = 2.$, a proto $\mathbf{D} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. □

3.5.

5.7. Najděte regulární matici $\mathbf{P}$ nad tělesem reálných čísel, pro kterou platí, že $\mathbf{P}^{-1}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Využijeme údaje, které jsme o matici $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ zjistili v 5.4.

Označme φ endomorfismus na prostoru $\mathbf{R}^2$ s maticí $[\varphi]_{K_2} = \mathbf{M}$ vzhledem ke kanonické bázi. Podobně jako u úloh týkajících se diagonalizovatelnosti můžeme problém převést na otázku nalezení báze $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ vůči níž bude mít matice endomorfismu φ Jordanův kanonický tvar, tj $[\varphi]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. To ovšem znamená, že $\varphi(\mathbf{v}_1) = 2\,\mathbf{v}_1$ a $\varphi(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2$. Odtud okamžitě vidíme, že vektor $\mathbf{v}_1$ je právě vlastním vektorem matice $\mathbf{M}$, zvolme například vektor $(1, -1)$ a druhý vektor $\mathbf{v}_2$ dostaneme jako řešení nehomogenní soustavy rovnic $(\mathbf{M} - 2\mathbf{E})\,\mathbf{v}_2^T = \mathbf{v}_1^T$ s maticí $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \end{array}\right)$. Vidíme, že soustavu řeší například vektor $(\frac{1}{3}, 0)$, našli jsme tak hledanou matici $\mathbf{P} = [\mathrm{Id}]_{BK_2} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. □

5.8. Mějme komplexní matice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Najděte Jordanův normální tvar matic $\mathbf{G}$ a $\mathbf{H}$,
(b) spočítejte $\mathbf{G}^{50}$,
(c) existuje-li, najděte přirozené n, pro které $\mathbf{H}^n = \mathbf{0}$.

(a) Opět nejprve spočítáme charakteristické polynomy $\det(\mathbf{G} - \lambda\mathbf{E}) = -(\lambda + 1)^3$ a $\det(\mathbf{H} - \lambda\mathbf{E}) = -\lambda^3$, tedy $\sigma(\mathbf{G}) = \{-1, -1, -1\}$ a $\sigma(\mathbf{H}) = \{0, 0, 0\}$. Nyní stejně jako v 5.5 využijeme pozorování, že pro dvě podobné matice $h(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = h(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})$ $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ platí, že $h(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = h(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})$ pro každá skalár λ, speciálně pro vlastní čísla. Protože $h(\mathbf{G} + \mathbf{E}) = 2$ a $h(\mathbf{H}) = 2$, dostáváme

$$\mathbf{G} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Známe-li Jordanův normální tvar $\mathbf{J}$ matice $\mathbf{G}$ a spočítáme-li regulární matici $\mathbf{P}$, pro kterou $\mathbf{G} = \mathbf{PJP}^{-1}$ $\mathbf{G}^{50} = \mathbf{PJ}^{50}\mathbf{P}^{-1}$, zbyde nám proto určit $\mathbf{J}^{50}$.

Matici $\mathbf{P}$ spočítáme stejným způsobem jako v 5.7. Tedy hledáme nejdřív vlastní vektor $\mathbf{v}_1$, tj. vyřešíme homogenní soustavu rovnic s maticí $\mathbf{G} + \mathbf{E}$ a poté řešíme nehomogenní soustavy rovnic $(\mathbf{G} + \mathbf{E})\,\mathbf{v}_2^T = \mathbf{v}_1^T$ a $(\mathbf{G} + \mathbf{E})\,\mathbf{v}_3^T = \mathbf{v}_2^T$ (A+E)v3=v2, tedy postupně hledáme řešení soustav s maticemi:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Spočítali jsme, že například $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{3}(1, 1, 0)$ a $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{9}(2, -1, 0)$. Tyto vektory sepíšeme do matice přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{9} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ od kanonické bázi k bázi $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ a obvyklým způsobem určíme inverzní matici $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Dále určíme podobně jako v 5.3(c) hodnotu $\mathbf{J}^{50} = \begin{pmatrix} (-1)^{50} & -\binom{50}{1} & \binom{50}{2} \\ 0 & (-1)^{50} & -\binom{50}{1} \\ 0 & 0 & (-1)^{50} \end{pmatrix}$.

Konečně zbývá dopočítat $\mathbf{G}^{50} = \mathbf{PJ}^{50}\mathbf{P}^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{9} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -50 & 1225 \\ 0 & 1 & -50 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3576 & -3725 & 3575 \\ -50 & 51 & -50 \\ -3625 & 3775 & 3624 \end{pmatrix}.$$

(c) Uvažujeme stejně jako v (b), tedy uvědomíme si, že existuje regulární matice $\mathbf{Q}$, pro kterou $\mathbf{H}^n = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n \mathbf{Q}^{-1}$ stačí nahlédnout, že $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \neq \mathbf{0}$ a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \mathbf{0}$, tedy hledané minimální $n = 3$. □

6. Projektivní prostory

6.1. Spočítejte počet všech geometrických bodů projektivního prostoru $P_3(\mathbf{Z}_5^4)$.

Stačí si uvědomit, že projektivní prostor $P_3(\mathbf{Z}_5^4)$ je tvořen právě všemi přímkami (tj. jednodimenzionálními podprostory) vektorového prostoru. Každá přímka je generována nenulovým vektorem a nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ obsahuje právě 4 nenulové vektory, proto

$$|P_3(\mathbf{Z}_5^4)| = |\{\langle \mathbf{v} \rangle |\ \mathbf{v} \in \mathbf{Z}_5^4 \setminus \{\mathbf{0}\}\}| = \frac{5^4 - 1}{5 - 1} = 156.$$

□

6.2. Rozhodněte, zda existuje podprostor projektivního prostoru $P_{99}(V_{100})$ nad $\mathbf{Z}_5$, které má 1, 2, 8, 31 či 40 prvků.

Obdobnou úvahou jako v předchozí úloze si rozmyslíme, že projektivní podprostor dimenze k, tj. vektorový prostor V dimenze $k+1$ nad tělesem $\mathbf{Z}_5$ obsahuje právě $\frac{5^{k+1}}{5-1} = \sum_{i=0}^{k} 5^i$ geometrických bodů. Neprázdný podprostor projektivního prostoru $P_{99}(V_{100})$ tedy může být tvaru $P_k(V_{k+1})$ pro čísla $k = 0, 1, \ldots, 99$, tedy může mít postupně 1, 6, 31, 156, … prvků. Podprostor projektivního prostoru $P_{99}(V_{100})$ o 2, 8 ani o 40 prvcích tedy neexistuje, zatímco podprostory o 1 a $31 = 1 + 5 + 25$ prvcích existují. □

6.3. Najděte všechny geometrické body podoprostoru $P(U)$ projektivního prostoru $P_3(\mathbf{Z}_5^4)$, kde $U = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ pro dvojici lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$.

Potřebujeme vypsat všech šest přímek ležících v podprostoru U, vidíme tedy, že

$$P_1(U) = \{\langle \mathbf{v} \rangle |\ \mathbf{v} \in U \setminus \{\mathbf{0}\}\} =$$

$$= \{\langle \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{v}_2 \rangle, \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle, \langle \mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2 \rangle, \langle \mathbf{v}_1 + 3\,\mathbf{v}_2 \rangle, \langle \mathbf{v}_1 + 4\,\mathbf{v}_2 \rangle\}.$$

□

10.5.

6.4. Najděte nějakou geometrickou bázi projektivního prostoru $P_3(\mathbf{Z}_5^4)$.

Potřebujeme najít takovou pětici geometrických, aby žádná jejich čtveřice neležela v jedné nadrovině, tj. aby každá čtveřice aritmetických zástupců geometrických bodů byla lineárně nezávislá. Podle Věty 21.9 stačí vzít libovolnou bázi vektorového prostoru $\mathbf{Z}_5^4$ a jako pátý aritmetický zástupce vzít jejich součet.

Geometrickou bázi tvoří například pětice $\{\langle(1,0,0,0)\rangle, \langle(0,1,0,0), \langle(0,0,1,0), \langle(0,0,0,1), \langle(1,1,1,1)\rangle\}$. □

6.5. Rozhodněte, zda množina geometrických bodů $\langle(1,2,3)\rangle$, $\langle(1,2,0)\rangle$, $\langle 4,4,3)\rangle$, $\langle(4,2,0)\rangle$ tvoří geometrickou bázi projektivního prostoru $P_2(\mathbf{Z}_5^3)$.

V předchozím příkladu jsme si rozmysleli, že stačí zjistit, zda je $(1,2,3)$, $(1,2,0)$, $(4,4,3)$ lineárně nezávislá, a tedy báze $\mathbf{Z}_5^3$, a zda všechny souřadnice vektoru $(4,2,0)$ vzhledem k této bázi jsou nenulové. Snadno zjistíme, že $B = ((1,2,3),(1,2,0),(4,4,3))$ tvoří bází a $\{(4,2,0)\}_B = (1,2,4)$. Tedy $\langle(1,2,3)\rangle$, $\langle(1,2,0)\rangle$, $\langle(4,4,3)\rangle$, $\langle(4,2,0)\rangle$ je geometrickou bází $P_2(\mathbf{Z}_5^3)$. □

6.6. Rozhodněte, zda je zobrazení K projektivního prostoru $P_2(\mathbf{Z}_5^3)$ do sebe dané předpisem $K(\langle\mathbf{u}\rangle) = \langle\mathbf{u}\,\mathbf{A}\rangle$ kolineací, jestliže $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Podle definice kolineárního zobrazení nám stačí zjistit, zda je tvaru $K(\langle\mathbf{u}\rangle) = \langle\varphi(\mathbf{u})\rangle$ pro nějaký prostý homomorfismus φ. Jak snadno ověříme, matice $\mathbf{A}$ je regulární, proto určuje právě požadovaný prostý endomorfismus φ s maticí $[\varphi]_{K_3} = \mathbf{A}^T$.

□

6.7. Existuje-li nějaká kolineace H projektivního prostoru $P_2(\mathbf{Z}_5^3)$, pro níž platí, že $H(\langle(1,0,0)\rangle) = \langle(1,2,3)\rangle$, $H(\langle(0,1,0)\rangle) = \langle(1,2,0)\rangle$, $H(\langle(0,0,1)\rangle) = \langle(4,4,3)\rangle$, $H(\langle(1,1,1)\rangle) = \langle(4,2,0)\rangle$, najděte endomorfismus ψ, který ji určuje, tj. platí, že $H(\langle\mathbf{u}\rangle) = \langle\psi(\mathbf{u})\rangle$

Předně poznamenejme, že jsme o množině geometrických bodů $\langle(1,2,3)\rangle$, $\langle(1,2,0)\rangle$, $\langle 4,4,3)\rangle$, $\langle(4,2,0)\rangle$ ukázali, že jde o geometrickou bázi. Zřejmě je geometrickou bází i množina $\langle\mathbf{e}_1\rangle$, $\langle\mathbf{e}_2\rangle$, $\langle\mathbf{e}_3\rangle$, $\langle(1,1,1)\rangle$. Proto podle Věty 21.14 (jednoznačně určená) kolineace H rozšiřující bijekci geometrické báze na geometrickou bázi existuje.

Pro její nalezení budeme postupovat stejně jako v důkaze Věty 21.14. Najdeme takové aritmetické reprezentanty obou geometrickýh bází, aby byl poslední vektor právě součtem všech vektorů předchozích. Vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $(1,1,1)$ jsme tak přímo volili, tudíž zbývá najít souřadnice vektoru $(4,2,0)$ vůči bázi $B = ((1,2,3),(1,2,0),(4,4,3))$. Už jsme spočítali, že $\{(4,2,0)\}_B = (1,2,4)$, proto definujme homomorfismus ψ předpisem $\psi(\mathbf{e}_1) = 1\cdot(1,2,3)$, $\psi(\mathbf{e}_2) = 2\cdot(1,2,0)$ a $\psi(\mathbf{e}_3) = 4\cdot(4,4,3)$. Nyní můžeme endomorfismus popsat pomocí matice vzhledem ke kanonické bázím $[\psi]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. □

6.8. Rozhodněte, zda existuje kolineární zobrazení L z projektivního prostoru $P_1(\mathbf{R}^2)$,

(a) do $P_1(\mathbf{R}^2)$ splňující podmínku $L(\langle(1,3)\rangle) = \langle(1,0)\rangle$, $L(\langle(1,1)\rangle) = \langle(1,2)\rangle$, $L(\langle(1,2)\rangle) = \langle(0,1)\rangle$
(b) do $P_2(\mathbf{R}^3)$ splňující podmínku $L(\langle(2,1)\rangle) = \langle(1,0,0)\rangle$, $L(\langle(1,1)\rangle) = \langle(0,1,0)\rangle$, $L(\langle(1,3)\rangle) = \langle(0,0,1)\rangle$
(c) do $P_2(\mathbf{R}^3)$ splňující podmínku $L(\langle(2,1)\rangle) = \langle(1,0,1)\rangle$, $L(\langle(1,1)\rangle) = \langle(2,1,0)\rangle$, $L(\langle(1,3)\rangle) = \langle(1,1,-1)\rangle$.

(a) Podle Věty 21.14 stačí, když uvážíme, že množiny $\{\langle(1,3)\rangle, \langle(1,1)\rangle, \langle(1,2)\rangle\}$ a $\{\langle(1,0)\rangle, \langle(1,2)\rangle, \langle(0,1)\rangle\}$ tvoří geometrické báze. Snadno zjistíme, že se jedná o báze, tedy požadované kolineární zobrazení (dokonce kolineace) existuje.

(b) Vidíme, že vektory $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ generují celé $\mathbf{R}^3$, tedy nemůže existovat homomorfismus $\mathbf{R}^2$ do $\mathbf{R}^3$, v jehož obrazu by všechny tři uvedené vektory ležel, iproto požadované kolineární zobrazení neexistuje.

(c) Tentokrát snadno nahlédneme, že množina $\{\langle(2,1)\rangle, \langle(1,1)\rangle, \langle(1,3)\rangle\}$ je geometrická báze projektivního prostoru $P_1(\mathbf{R}^2)$ a množina $\{\langle(1,0,1)\rangle, \langle(2,1,0)\rangle, \langle(1,1,-1)\rangle\}$ je geometrická báze projektivního prostoru $P_1(\langle(2,1,0),(1,1,-1)\rangle)$, tedy podle Věty 21.14 existuje (právě jedno) kolineární zobrazení rozšiřující L.

□

6.9. Najděte všechny samodružné body kolineací z příkladů 6.6 a 6.7.

Hledáme geometrické body $\langle\mathbf{v}\rangle$, pro než platí, že $K(\langle\mathbf{v}\rangle) = \langle\mathbf{v}\rangle$, tedy takové aritmetické body $\mathbf{v}$, že $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda\,\mathbf{v}$, pro vhodné (víme, že nenulové) λ, tj. hledáme vlastní vektory endomorfismu φ.

Nejprve obvyklým postupem zjistíme, že vlastní čísla matice $\mathbf{A}^T$ a tedy i endomorfismu φ jsou 1 a 4 a poté najdeme všechna řešení homogenních soustav rovnic s maticemi:

$$\mathbf{A}^T - \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{A}^T - 4\cdot\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 1 jsou všechny nenulové vektory z podprostoru $U_1 = \langle(2,1,0),(3,0,1)\rangle$ a vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 4 leží v $U_4 = \langle(3,3,1)\rangle$. Zbývá popsat různé geometrické body projektivního podprostoru $P_1(U_1) = \{\langle(2,1,0)\rangle, \langle(3,0,1)\rangle, \langle(0,1,1)\rangle, \langle(3,1,2)\rangle, \langle(1,1,3)\rangle, \langle(4,1,4)\rangle\}$ a $P_0(U_4) = \{\langle(3,3,1)\rangle\}$. Našli jsme tedy právě sedm různých samodružných bodů kolineace K:

$$\langle(2,1,0)\rangle, \langle(3,0,1)\rangle, \langle(0,1,1)\rangle, \langle(3,1,2)\rangle, \langle(1,1,3)\rangle, \langle(4,1,4)\rangle, \langle(3,3,1)\rangle.$$

V případě kolineace H, postupujeme stejně. Nejprve zjistíme, že endomorfismsu ψ, který jsme našli v příkladu 6.7 má jediné vlastní číslo 2 a poté zjistíme, že příslušné vlastní vektory jsou právě všechny nenulové vektory z lineárního obalu $\langle(0,1,2)\rangle$. Tedy H má jediný samodružný bod $\langle(0,1,2)\rangle$. □

7. Polární ortonormální báze

7.1. Uvažujme symetrickou bilineární formu g na $\mathbf{R}^3$ s maticí vzhledem ke kanonické bázi $[g]_{K3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Najděte ortonormální bázi unitárního prostoru $(\mathbf{R}^3, \omega)$, která je zároveň polární bází bilineární formy g.

Využijeme důkazu Věty 22.17, která nám existenci ortonormální bázi unitárního prostoru, která je zároveň polární bází symetrické bilineární formy, zaručuje. Poznamenejme, že všechny vektory hledané báze jsou podle 22.17 vlastní vektory matice $[g]_{K3}$

Nejprve určíme vlastní čísla. Mohli bychom standardně spočítat charakteristický polynom $\det([g]_{K3} - \lambda\mathbf{E})$ a najít jeho kořeny. V našem případě je ovšem snadné uhádnout vlastní číslo 1, protože matice $[g]_{K3} - 1 \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ je zjevně singulární. Vyřešíme-li homogenní soustavu rovnic s maticí $[g]_{K3} - 1 \cdot \mathbf{E}$ dostaneme všechny příslušné vlastní vektory $\mathbf{v}_1$, tedy $\mathbf{v}_1 \in \langle(-1,1,0),(-1,0,1)\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$. Podle Věty 22.17 musí být další vlastní vektor kolmý na vektory příslušné vlastnímu číslu 1, tedy musí ležet v podprostoru $\langle(-1,1,0),(-1,0,1)\rangle^{\perp} = \langle(1,1,1)\rangle$. Proto $(1,1,1)$ musí být vlastní vektor matice $[g]_{K3}$ a spočítáme-li součin $\mathbf{A} \cdot (1,1,1)^T = (4,4,4)^T$, dostáváme druhé (a poslední) vlastní číslo 4. Zopakujme, že $\mathbf{v}_4$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 4, právě když $\mathbf{v}_4 \in \langle(1,1,1)\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$, tedy, že $\langle(1,1,1)\rangle$ je množina všech řešení homogenní soustavy s maticí $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Nyní zbývá, abychom našli ortonormální báze podprostorů $\langle(-1,1,0),(-1,0,1)\rangle$ a $\langle(1,1,1)\rangle$. Například pomocí Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace zjistíme, že $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)$ je báze $\langle(-1,1,0),(-1,0,1)\rangle$, tedy

$$B = (\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2), \frac{1}{\sqrt{3}}\langle(1,1,1))$$

je hledaná ortonormální báze $(\mathbf{R}^3, \omega)$, pro níž $[g]_{K3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Na závěr poznamenejme, že z nalezených vlastních čísel a dimenzí podprostorů vlastních vektorů (tzv. geometrické násobnosti) můžeme zjistit, že charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$ je $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$. □

7.2. Najděte reálnou ortogonální matici $\mathbf{U}$, pro níž je $\mathbf{U}^T \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{U}$ nad $\mathbf{R}$ diagonální.

Položme $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ a definujme bilineární formu f na $\mathbf{R}^3$ s maticí $[f]_{K_3} = \mathbf{A}$. Potom najdeme stejným způsobem jako v předchozí úloze bázi B, která je ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu ω a polární vzhledem k symetrické bilineární formě f

Nejprve určíme vlastní čísla jim příslušné vlastní vektory. Jedno vlastní číslo je zřejmě $\lambda = 3$ a vyřešíme homogenní soustavu rovnic s maticí $\mathbf{A}-3\cdot\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ a dostaneme vlastní vektory $\mathbf{v}_1 \in \langle(-1,1,0),(-1,0,1)\rangle \setminus \{\mathbf{0}\}$, a protože další vlastní vektor musí být kolmý na vektory příslušné vlastnímu číslu 3, tj. leží v podprostoru $\langle(-1,1,0),(-1,0,1)\rangle^{\perp} = \langle(1,1,1)\rangle$, je jím například vektor $(1,1,1)$. Nyní spočítáme $\mathbf{A}(1,1,1)^T = (9,9,9)^T$, odkud dostáváme vlastnímu číslo $\lambda = 9$.

Nyní najdeme ortonormální báze obou podprostorů vlastních vektorů. Pro vlastní číslo 9 stačí normalizovat, abychom dostali vektor $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ a pro $\lambda = 3$ najdeme ortonormální bázi $(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2))$ podprostoru $\langle(-1,1,0),(-1,0,1)\rangle$ například Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací. Nyní položme $B = (\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),$ $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2))$. Protože je B ortonormální báze, je zřejmě matice přechodu $\mathbf{U} = [\mathrm{Id}]_{BK_3}$ ortogonální a

$$\mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

7.3. Nechť je f symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ s maticí $[f]_{K_3} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi. Najděte bázi B, která je ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu ω a polární vzhledem k symetrické bilineární formě f.

Stačí nám vzít ortonormální bázi B z 7.2, o níž víme, že

$$[f]_B = [\mathrm{Id}]^T_{BK_3}[f]_{K_3}[\mathrm{Id}]_{BK_3} = \mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tedy B je polární báze f. □

7.4. Najděte polární bázi symetrické bilineární formy g na vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$, která je ortonormální vzhledem ke standardnnímu skalárnímu součinu, jestliže $[g]_{K_3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Postupujeme stejně jako v úlohách 7.2 a 7.3. Nejprve standardním způsobem najdeme spektrun matice $[g]_{K_3}$, tedy $\sigma([g]_{K_3}) = \{1,1,7\}$. Pro vlastní číslo 1 najdeme podprostor vlastních vektorů $V_1 = \langle(1,-1,0),(2,0,-1)\rangle$ a pro vlastní číslo 7 tvoří podprostor vlastních vektorů $V_7 = \langle(1,1,2)\rangle$. Zbývá nám například pomocí Grammovy-Schmidtovy ortogonalizace najít ortonormální bázi V_1 (tedy například $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1))$ a normalizovat vektor $(1,1,2)$. Nyní je $M =$

$(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2))$ ortonormální bází $\mathbf{R}^3$, která je zároveň polární vzhledem ke g. Závěrem poznamenejme, že $[g]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ □

8. Invariantní faktory a Jordanův kanonický tvar

8.1. Spočítejte invariantní faktory reálné λ-matice $\mathbf{A}(\lambda)$ a určete její kanonický tvar, jestliže

(a) $\mathbf{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2-1 & \lambda+1 \\ \lambda^2+3\lambda+2 & \lambda^2+\lambda \end{pmatrix}$,

(b) $\mathbf{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 3 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3 & 3-\lambda \end{pmatrix}$,

(c) $\mathbf{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$,

(d) $\mathbf{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1-\lambda & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$.

(a) Postupujeme-li podle definice, spočítáme nejprve největší společný dělitel $D_1^{\mathbf{A}(\lambda)}$ všech subdeterminantů řádu 1, tedy největší společný dělitel všech prvků matice $\mathbf{A}(\lambda)$, snadno zjistíme, že $D_1^{\mathbf{A}(\lambda)} = \lambda+1$. Protože má matice $\mathbf{A}(\lambda)$ jediný (triviální) subdeterminant řádu dvě, zbývá nám spočítat $D_2^{\mathbf{A}(\lambda)} = \det(\mathbf{A}(\lambda)) = (\lambda+1)^2(\lambda^2-2\lambda-2)$. Invraiantní faktory jsou podle definice hodnoty

$$E_1^{\mathbf{A}(\lambda)} = D_1^{\mathbf{A}(\lambda)} = \lambda+1, \quad E_2^{\mathbf{A}(\lambda)} = \frac{D_2^{\mathbf{A}(\lambda)}}{D_1^{\mathbf{A}(\lambda)}} = (\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda-2).$$

Podle Věty 18.4 matice $\mathbf{A}(\lambda)$ má kanonický tvar, jehož invariantní faktory jsou podle Věty 18.12 stejné jako u matice $\mathbf{A}(\lambda)$, snadno tedy nahlédneme, že $\mathbf{A}(\lambda)$ lze převést na matici $\begin{pmatrix} E_1^{\mathbf{A}(\lambda)} & 0 \\ 0 & E_2^{\mathbf{A}(\lambda)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & (\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda-2) \end{pmatrix}$.

(b) Vidíme, že matice $\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{M} - \lambda\mathbf{E}$ pro matici $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Protože jsme v úloze 5.5 našli pro tuto matici Jordanův kanonický tvar a podle Věty 18.14 známe invariantní faktory matice $J-\lambda\mathbf{E}$ pro Jordanovu matici $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$E_1^{J-\lambda\mathbf{E}} = E_1^J(\lambda) = 1, \quad E_2^{J-\lambda\mathbf{E}} = E_2^J(\lambda) = 1, \quad E_3^{J-\lambda\mathbf{E}} = E_3^J(\lambda) = (\lambda+1)^3$$

Nyní snadno nahlédneme, že kanonický tvar matice $\mathbf{A}(\lambda)$ je

$$\begin{pmatrix} E_1^{\mathbf{A}(\lambda)} & 0 & 0 \\ 0 & E_2^{\mathbf{A}(\lambda)} & 0 \\ 0 & 0 & E_3^{\mathbf{A}(\lambda)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^3 \end{pmatrix}.$$

(c) Protože opět můžeme využít znalosti Jordanova kanonického tvaru matice $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ z úlohy5.5 a jeho invariantních faktorů díky Větě 18.14, postupujeme stejně jako v případu (b). Nejprve určíme invariantní faktory matice $J - \lambda\mathbf{E}$ pro Jordanovu matici $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pak spočítáme invariantní faktory

$$E_1^{J-\lambda\mathbf{E}} = E_1^J(\lambda) = 1, \quad E_2^{J-\lambda\mathbf{E}} = E_2^J(\lambda) = \lambda+1, \quad E_3^{J-\lambda\mathbf{E}} = E_3^J(\lambda) = (\lambda+1)^2.$$

Kanonický tvar matice $\mathbf{A}(\lambda)$ je $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$

(d) Nyní budeme matici $\mathbf{A}(\lambda)$ upravovat řádkovými a sloupcovými elementárními úpravami, nejprve přehodíme 1. a 4. řádek, s jehož pomocí eliminujeme hodnoty v prvním sloupci:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1-\lambda & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -\lambda \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2-\lambda & 3(\lambda+1) \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda & -\lambda^2+\lambda+2 \end{pmatrix} \sim$$

Nyní snadno eliminujeme první řádek (0 v prvním sloupci s ostatními řádky nic neprovedou), poté odečteme 2. řádek od čtvrtého, poté přehodíme 2. a 3. řádek a eliminujme hodnoty v druhém sloupci:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2-\lambda & 3(\lambda+1) \\ 0 & 3 & 2-\lambda & -\lambda^2+\lambda+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2-\lambda & 3(\lambda+1) \\ 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda-2) & -3(\lambda+1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix} \sim$$

Opět bez počítání můžeme eliminovat a normovat druhý řádek, pak přičteme trojnásobek třetího sloupce k posledímu a sloupce přehodíme:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda-2) & -9(\lambda+1) \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9(\lambda+1) & (\lambda+1)(\lambda-2) \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Zbývá eliminovat třetí sloupec a poté normovat a eliminovat zbylé řádky:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9(\lambda+1) & (\lambda+1)(\lambda-2) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9}(\lambda+1)^2(\lambda-2) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+1)^2(\lambda-2) \end{pmatrix}.$$

Protože je nalezená matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+1)^2(\lambda-2) \end{pmatrix}$ kanonickým tvarem, vidíme, že hledané invariantní faktory jsou

$$E_1^{\mathbf{A}(\lambda)} = E_2^{\mathbf{A}(\lambda)} = 1, \quad E_3^{\mathbf{A}(\lambda)} = \lambda + 1, \quad E_4^{\mathbf{A}(\lambda)} = (\lambda+1)^2(\lambda-2).$$

□

8.2. Najděte Jordanův kanonický tvar matice $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

V předchozí úloze jsme našli invariantní faktory matice $\mathbf{N} - \lambda\mathbf{E}$, z nichž snadno díky Větám 18.14 a 18.20 určím Jordanův kanonický tvar matice $\mathbf{N}$, který musí mít stejné invariantní faktory jako matice $\mathbf{N}$. Protože $E_3^N = \lambda+1$ a $E_4^N = (\lambda+1)^2(\lambda-2)$, obsahuje Jordanův kanonický tvar matice $\mathbf{N}$ dvě Jordanovy buňku stupně 1, jednu s vlastním číslem -1 a jednu s vlastním číslem 2 a dále obsahuje Jordanovu buňku stupně 2 s vlastním číslem -1, tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

□

9. Projektivní rozšíření afinního prostoru a kvadriky

9.1.

□

9.2. Najděte tečnu kvadriky $4x^2 - y^2 = 1$ (vzhledem k souřadné soustavě $S = ((0,0),(1,0),(0,1)))$ v afiním prostoru $\mathbf{R}^2(\mathbf{R}^2)$

(a) procházející bodem $(1, \sqrt{3})$,
(b) procházející bodem $(1, 1)$.

□

9.3. Klasifikujte kvadriku $x^2 + 4xy + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ vzhledem k souřadné soustavě S=((0,0), (1,0), (0,1)) v afinním prostoru $\mathbf{R}^2(\mathbf{R}^2)$.

□

Další úlohy

(1) Najděte všechna vlastní čísla a všechny jim příslušné vlastní vektory endomorfismu φ na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$ a a rozhodněte, zda je φ diagonalizovatelný jestliže

$$\text{(a)}\quad [\varphi]_{K_4} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)}\quad [\varphi]_{K_4} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{(c)}\quad [\varphi]_{K_4} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{(d)}\quad [\varphi]_{K_4} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix},$$

(e) $\varphi = \mathrm{Id}$, (f) $\varphi = 0$.

(2) Najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory reálné matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, a rozhodněte, zda je matice diagonalizovatelná

(3) Najděte nad tělesem $\mathbf{Z}_7$ všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ a existuje-li, najděte regulární matici $\mathbf{P}$, pro niž je $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ diagonální.

(4) Mějme komplexní matice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Najděte Jordanův kanonický tvar matic $\mathbf{G}$ a $\mathbf{H}$,
   (b) spočítejte $\mathbf{G}^5$ a $\mathbf{H}^5$,
   (c) najděte Jordanův kanonický tvar matic $\mathbf{GH}$ a $\mathbf{HG}$.

(5) Určete počet všech geometrických bodů a všech podprostorů projektivního prostoru $P_n(\mathbf{Z}_p^{n+1})$ pro každé prvočíslo p a přirozené číslo n.

(6) Určete počet všech kolineací projektivního prostoru $P_n(\mathbf{Z}_p^{n+1})$ pro každé prvočíslo p a přirozené číslo n.

(7) Existuje-li kolineace K projektivního prostoru $P_3(\mathbf{Z}_7^4)$ splňující $K(p_i) = q_i$ pro $i = 1, \dots, 5$, určete matici vzhledem ke kanonické bázi endomorfismu , který ji určuje, a najděte všechny její samodružné body, jestliže
   (a) $p_1 = \langle(1,1,1,2)\rangle, p_2 = \langle(1,2,3,2)\rangle, p_3 = \langle(1,2,1,1)\rangle, p_4 = \langle(1,2,5,6)\rangle$, $p_5 = \langle(4,0,3,4)\rangle$ a $q_1 = \langle(1,1,1,1)\rangle, q_2 = \langle(1,1,1,2)\rangle, q_3 = \langle(1,1,2,1)\rangle$, $q_4 = \langle(1,2,1,1)\rangle$, $q_5 = \langle(1,0,0,0)\rangle$
   (b) $p_1 = \langle(1,1,1,1)\rangle, p_2 = \langle(1,1,1,2)\rangle, p_3 = \langle(1,1,2,1)\rangle, p_4 = \langle(1,2,1,1)\rangle$, $p_5 = \langle(1,0,0,0)\rangle$ a $q_1 = \langle(1,1,1,2)\rangle, q_2 = \langle(1,2,3,2)\rangle, q_3 = \langle(1,2,1,1)\rangle$, $q_4 = \langle(1,2,5,6)\rangle$, $q_5 = \langle(4,0,3,4)\rangle$.
   (c) $p_1 = q_2 = \langle\mathbf{e}_1\rangle$, $p_2 = q_=\langle\mathbf{e}_2\rangle$, $p_3 = q_4 = \langle\mathbf{e}_3\rangle$, $p_4 = q_5 = \langle\mathbf{e}_4\rangle$ a $p_5 = q_1 = \langle(6,5,4,3)\rangle$

(8) Najděte polární bázi symetrické bilineární formy f na vektorovém prostoru $\mathbf{R}^n$, která je ortonormální vzhledem ke standardnnímu skalárnímu součinu, jestliže

(a) $n = 3$ a $[g]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

(b) $n = 3$ a $[g]_{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $n = 8$ a $g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 1 + \delta_{ij}$,

(d) $n = 4$ a $g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = i + j$.