PÍSEMKY A DOMÁCÍ ÚKOLY (ÚTERÝ, 14:00, M4)

1 (2.3)**.** Buď $M = ((1,2,1),(3,0,2),(4,4,1))$ báze vektorového prostoru $\mathbf{Z}_5^3$. Spočítejte souřadnice vektoru $(0,3,2)$ vzhledem k bázi M a najděte vektor $\mathbf{v}$, jehož souřadnice vzhledem k M jsou $(3,0,1)$.

Řešení: Souřadnice vektoru $\mathbf{u}$ vzhledem k bázi M tvoří vektor $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{Z}_5^3$ splňující podmínku $\mathbf{u} = x_1(1,2,1) + x_2(3,0,2) + x_3(4,4,1)$. V prvním případě tedy řešíme nehomogenní soustavu rovnic:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Odtud už snadno dopočítáme $[(0,3,2)]_M = (x_1,x_2,x_3) = (1,1,4)$.

V druhém případě stačí dosadit známé souřadnice

$$\mathbf{v} = 3 \cdot (1,2,1) + 0 \cdot (3,0,2) + 1 \cdot (4,4,1) = (2,0,4).$$

□

Domácí úkol k 1.písemce (prosím odevzdat do 16.3):*Buď* $B = ((1,1,1,2),(1,1,2,1),\ (1,2,1,1),(2,1,1,1))$ *a* $C = ((2,1,0,0),(1,1,0,1),(2,2,1,2),(1,1,0,0))$ *posloupnosti vektorů vektorového prostoru* $\mathbf{Z}_3^4$. *Dokažte, že jde o báze a najděte matici* $[\mathrm{Id}]_{CB}$ *(tj. matici přechodu od báze* B *k bázi* C*).*

2 (9.3)**.** Buď f bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_7^2$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$ s maticí $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ vzhledem k bázi $B = ((3,1),(5,5))$. Najděte matice vzhledem ke kanonické bázi a) bilineární formy f, b) symetrické bilineární formy f_s a c) antisymetrické bilineární formy f_a, pro které $f = f_s + f_a$.

Označme $\mathbf{D}$ matici f, dále $\mathbf{D}_s$ matici f_s a $\mathbf{D}_a$ matici f_a vzhledem k bázi B a připomeňme, že $\mathbf{D} = [\mathrm{Id}]_{K_2B}^T \cdot \mathbf{A} \cdot [\mathrm{Id}]_{K_2B}$. Nejprve tedy spočítáme například pomocí adjungované matice a hodnoty $\det([\mathrm{Id}]_{K_2B}) = 3$ matici přechodu $[\mathrm{Id}]_{K_2B} = [\mathrm{Id}]_{BK_2}^{-1} = 3^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Nyní vynásobíme matice

$$\mathbf{D} = [\mathrm{Id}]_{K_2B}^T \cdot \mathbf{A} \cdot [\mathrm{Id}]_{K_2B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Uvědomíme-li si, že hledané matice jsou právě matice rozkladu $\mathbf{D}$ na symetrickou a antisymetrickou část, stačí nám tento rozklad spočítat:

$$\mathbf{D}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{D} + \mathbf{D}^T) = 2^{-1} \cdot (\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_a = \mathbf{D} - \mathbf{D}_s = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Domácí úkol k 2.písemce (prosím odevzdat do 23.3, ti, co za 2.písemku získali 3 body, dostanou 4. bod, spočítají-li správně část a)): *Buď f bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbf{Z}_7^3$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$ s maticí* $[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *vzhledem k bázi $B = ((4,0,1),(1,5,0),(1,3,0))$.*

a) Spočítejte hodnoty $f((0,0,1),(1,1,0))$ a $f((1,1,0)(0,0,1))$.

b) Najděte matice symetrické bilineární formy f_s a antisymetrické bilineární formy f_a vzhledem k bázi $C = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$, pro které $f = f_s + f_a$.

3 (16.3)**.** Mějme f_2 kvadratickou forma na $\mathbf{Z}_3^3$ danou předpisem $f_2(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3$. Spočítejte vzhledem ke kanonické bázi matici symetrické bilineární formy f, která vytváří f_2 (tj. $f_2(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v},\mathbf{v})$), a najděte nějakou polární bázi f.

Okamžitě vidíme, že

$$f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2,$$

a proto $[f]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vyřešíme-li homogenní soustavu rovnic s touto maticí, najdeme bázi vrcholu $\mathbf{p}_1 = (2,2,1)$. Postupujeme-li metodou I*, doplníme vektor $\mathbf{p}_1$ na bázi $\mathbf{Z}_3^3$ například vektory $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$ kanonické báze. Definujeme symetrickou bilineární formy $\widetilde{f}$ na podprostor $U = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$, předpisem $\widetilde{f}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = f(\mathbf{u},\mathbf{v})$ pro každé $\mathbf{u},\mathbf{v} \in U$, pak přímočaře spočítáme matici $[\widetilde{f}]_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vzhledem k bázi $N = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Nejprve tedy přímo vidíme, že $\widetilde{f}_2(\mathbf{e}_1) = 1 \neq 0$, tedy máme 2. vektor polární báze $\mathbf{p}_2 = (1,0,0)$ a poté vyřešíme homogenní soustavu rovnic s maticí

$$[\mathbf{p}_2]_N[\widetilde{f}]_N = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že soustavu řeší $[\mathbf{p}_3]_B = (2,1)$, tedy $\mathbf{p}_3 = 2 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = (2,1,0)$ Našli jsme polární bázi $((2,2,1),(1,0,0),(2,1,0))$. □

Domácí úkol k 3.písemce (prosím odevzdat do 30.3, ti, co za 2.písemku získali 3 body, dostanou 4. bod, spočítají-li správně část a)): *Buď $\mathbf{b}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{b}_2 = (1,0,1)$, $\mathbf{b}_3 = (1,0,2) \in \mathbf{Z}_7^3$ a buď g symetrická bilineární forma na $\mathbf{Z}_7^3$ splňující podmínky $g(\mathbf{b}_i,\mathbf{b}_i) = 1$ pro $i = 1,2,3$ a $g(\mathbf{b}_i,\mathbf{b}_j) = 3$ pro $i \neq j$. Najděte a) vrchol g, b) nějakou polární bázi g.*

4 (23.3)**.** Mějme f_2 kvadratickou forma na $\mathbf{R}^2$ danou předpisem $f_2(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$. Najděte nějakou polární bázi P symetrické bilineární formy f vytvářející f_2, matici $[f]_P$ a nenulový vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$, pro který $f_2(\mathbf{v}) = 0$.

Nejprve obvyklým způsobem určíme matici symetrické bilineární formy f vzhledem ke kanonické bázi $[f]_{K_2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ a postupujeme metodou II z přednášky, tj. upravujeme posloupností symetrických elementárních úprav a tyto úpravy (ve skutečnosti provedeme jedinou symetrickou úpravu) zaznamenáváme.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_s \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Protože je pravá část matice právě matice transponovaná k matici přechodu od polární báze P ke kanonické bázi, tedy $[\mathrm{Id}]_{PK_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, máme $P = ((1, -2), (0, 1))$ a $[f]_P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vezmeme-li nyní vektory polární báze P a hodnoty $f_2((1, -2)) = -1$ a $f_2((0, 1)) = 1$, vidíme, že $f_2((1, -2) + (0, 1)) = f_2((1, -2)) + f_2((0, 1)) = -1 + 1 = 0$, tedy $f_2((1, -1)) = 0$ a hledaným vektorem $\mathbf{v}$ je například $\mathbf{v} = (1, -1)$. □

Domácí úkol k 4.písemce (prosím odevzdat do 6.4, ti, co za 4.písemku získali 3 body, dostanou 4. bod, spočítají-li správně část a)): *Mějme f_2 kvadratickou formu na $\mathbf{R}^4$ danou předpisem $f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_4 + x_2^2 + 4x_2x_3 - 2x_2x_4 - x_3^2 - 2x_3x_4$. Označme f symetrickou bilineární formu f vytvářející f_2.*

a) Spočítejte signaturu f,

b) najděte nějakou polární bázi f.

5 (30.3)**.** Rozhodněte, zda je zobrazení $g((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 2x_3y_3$ skalární součin na $\mathbf{R}^3$.

Nad reálným vektorovým prostorem $\mathbf{R}^3$ potřebujeme zjistit, zda je g pozitivně definitní symetrická bilineární forma. Přitom z definice zobrazení vidíme, že se jedná o bilineární formu s maticí $[g]_{K_3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Protože je $[g]_{K_3}$ symetrická matice, je g symetrická bilineární forma. Zbývá nám určit signaturu, použijme k tomu například metodou II a symetricky upravujme:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že na diagonále nalezené diagonální matice jsou všechny hodnoty kladné, tedy g má signaturu $(0, 3, 0)$, proto jde to pozitivně definitní symetrickou bilineární forma.

Podobně snadno jsme mohli použít metodu III, spočítat determinanty

$$\det\begin{pmatrix}2\end{pmatrix} = 2, \quad \det\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix} = 5, \quad \det\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix} = 2$$

a odtud díky jejich kladnosti usoudit, že se je g pozitivně definitní.

Zjistili jsme, že g je skalární součin. □

Domácí úkol k 5.písemce (prosím odevzdat do 13.4, ti, co za 5.písemku získali 3 body, dostanou 4. bod, spočítají-li správně část a)): *Mějme* $M = ((1,0,1,1,1),(1,1,1,0,1),(1,1,0,1,1),(0,1,1,1,1),(1,1,1,1,0))$ *ortonormální bázi skalárního součinu* g *na reálném vektorovém prostoru* $\mathbf{R}^5$.

a) Spočítejte $g((1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0))$,

b) najděte matici g *zhledem ke kanonické bázi.*

6 (6.4)**.** Uvažujme standardní skalární součin $\cdot$ na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$. Ověřte, že je $B = ((\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$ je ortonormální báze $\mathbf{R}^4$ vzhledem k $\cdot$ a spočítejte souřadnice $[(1,2,0,3)]_B$.

Označme si vektory posloupnosti $B = (\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3,\mathbf{b}_4)$. Nyní přímočarým výpočtem zjistíme, že $\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j = \delta_{ij}$, tedy jsme zjistili, že B je ortonormální posloupnost. Tudíž je B lineárně nezávislá posloupnost délky 4 ve vektorovém prostoru dimenze 4, a proto jde o ortonormální bázi $\mathbf{R}^4$.

Protože pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^4$ a ortonormální bázi B platí $[\mathbf{v}]_B = (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{v}, \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{v}, \mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{v}, \mathbf{b}_4 \cdot \mathbf{v})$, spočítáme

$$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \cdot (1,2,0,3) = \frac{1}{2}(1+2+3) = 3,$$

$$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \cdot (1,2,0,3) = \frac{1}{2}(1-2+3) = 1,$$

$$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \cdot (1,2,0,3) = \frac{1}{2}(-1-2+3) = 0,$$

$$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \cdot (1,2,0,3) = \frac{1}{2}(-1+2+3) = 2,$$

tedy $[(1,2,0,3)]_B = (3,1,0,2)$. □

Domácí úkol k 6.písemce (prosím odevzdat do 20.4, ti, co za 6.písemku získali 3 body, dostanou 4. bod, spočítají-li správně část a)): *Uvažujme standardní skalární součin* $\cdot$ *na reálném vektorovém prostoru* $\mathbf{R}^4$ *a mějme vektory* $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1,0)$ $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{11}}(1,0,1,3)$ *a* $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{34}}(1,2,5,-2)$.

a) Dokažte, že je posloupnost $(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)$ *ortonormální a dopňte ji na ortonormální bázi* M.

b) Spočítejte souřadnice $[(1,2,0,3)]_M$ *a* $[(1,1,1,-1)]_M$.

7 (13.4)**.** Uvažujme standardní skalární součin $\cdot$ na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$. Najděte ortogonální bázi podprostoru $V = \langle(1,1,2,1),\ (0,1,1,1),\ (1,2,1,3)\rangle$ a nějakou bázi ortogonálního doplňku $V^\perp$.

Označme $\mathbf{u}_1 = (1,1,2,1)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,1,1)$, $\mathbf{u}_3 = (1,2,1,3)$, Vytvoříme pomoc Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace dokonce ortonormální posloupnost $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, pro kterou platí, že $\langle\mathbf{v}_1\rangle = \langle\mathbf{u}_1\rangle$, $\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\rangle = \langle\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\rangle$ a $\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\rangle = \langle\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\rangle$.

1. $\mathbf{v}_1 = \frac{(1,1,2,1)}{\|(1,1,2,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{7}}(1,1,2,1)$.
2. $\mathbf{v}_2' = (0,1,1,1) - \frac{1}{\sqrt{7}}(1,1,2,1)\cdot(0,1,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}(1,1,2,1) = (0,1,1,1) - \frac{4}{7}(1,1,2,1) = \frac{1}{7}(-4,3,-1,3)$. Proto $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{35}}(-4,3,-1,3)$.
3. Nejprve spočítáme $c_1 = \mathbf{v}_1\cdot(1,2,1,3) = \frac{8}{\sqrt{7}}$ a $c_2 = \mathbf{v}_2\cdot(1,2,1,3) = \frac{10}{\sqrt{35}}$. Potom $\mathbf{v}_3' = \mathbf{u}_3 - c_1\mathbf{v}_1 - c_2\mathbf{v}_2 = (1,2,1,3) - \frac{8}{7}(1,1,2,1) - \frac{2}{7}(-4,3,-1,3) = \frac{1}{7}(7,0,-7,7) = (1,0,-1,1)$ Tedy $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,-1,1)$.

Našli jsme ortonormální bázi $(\frac{1}{\sqrt{7}}(1,1,2,1), \frac{1}{\sqrt{35}}(-4,3,-1,3), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,-1,1))$. Konečně poznamenejme, že ortogonální bázi tvoří například i posloupnost $((1,1,2,1), (-4,3,-1,3), (1,0,-1,1))$.

Protože potřebujeme najít vektor kolmý na všechny vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, stačí například, abychom vyřešili homogenní soustavu s maticí

$$\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&1&1\\1&2&1&3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&1&1\\0&1&-1&2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&1&1\\0&0&-2&1\end{pmatrix},$$

tedy vidíme, že bází řešení soustavy i bází $V^\perp$ je vektor $(-1,-3,1,2)$. □

Domácí úkol k 7.písemce (prosím odevzdat do 27.4, ti, co za 7.písemku získali 3 body, dostanou 4. bod, spočítají-li správně část a)): *Uvažujme standardní skalární součin $\cdot$ na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$ a vektory $\mathbf{u}_1 = (1,1,-1,2)$, $\mathbf{u}_2 = (1,2,-2,3)$, a $\mathbf{u}_3 = (0,2,1,5)$. Najděte ortonormální báze podprostorů:*

a) $\langle\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\rangle$ *a* $\langle\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\rangle$,
b) $\langle\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\rangle$ *a* $\langle\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_3\rangle$.

8 (20.4)**.** Spočítejte ortogonální projekci vektoru $(2,-3,2,0,2)$ do podprostoru $U = \langle(1,0,1,1,1),\ (0,1,1,1,1)\rangle$ vektorovém prostoru $\mathbf{R}^5$ se standardním skalárním součinem.

Hledáme takovou lineární kombinaci vektorů $x_1\cdot(1,0,1,1,1) + x_2\cdot(0,1,1,1,1)$, aby byl vektor $(2,-3,2,0,2) - x_1\cdot(1,0,1,1,1) - x_2\cdot(0,1,1,1,1)$ kolmý na prostor U, tedy na oba generující vektory $(1,0,1,1,1)$, $(0,1,1,1,1)$. Spočítáme-li skalární součiny

$$(1,0,1,1,1)\cdot(1,0,1,1,1) = 4,\quad (1,0,1,1,1)\cdot(0,1,1,1,1) = 3,$$

$$(0,1,1,1,1)\cdot(0,1,1,1,1) = 4,\quad (1,0,1,1,1)\cdot(2,-3,2,0,2) = 6$$

a $(0,1,1,1,1)\cdot(2,-3,2,0,2)=1$, dostaneme z této úvahu Gramovu matici soustavy, kterou upravíme:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & -14 \end{array}\right).$$

Odtud již zjistíme, že $x_1 = 3$ a $x_2 = -2$, proto je ortogonální projekce vektoru $(2,-3,2,0,2)$ na podprostor U vektor $3\cdot(1,0,1,1,1) - 2\cdot(0,1,1,1,1) = (3,-2,1,1,1)$. □

Domácí úkol k 8.písemce (prosím odevzdat do 4.5: *Spočítejte ortogonální projekci vektoru* $(1, i, 1-i, 0)$ *do podprostoru* $U = \langle(1,0,i,1+i),\ (i,-1,0,1)\rangle$ *komplexního vektorovém prostoru* $\mathbf{C}^4$ *se standardním skalárním součinem.*

9 (27.4)**.** Najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ nad tělesem $\mathbf{Z}_7$

Nejprve spočítáme charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$, tedy $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 2 & -\lambda & 6 \\ 3 & 6 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 4 + 3 + 6\lambda + \lambda + 2\lambda = -(\lambda^2+5)\lambda$. Dosazením najdeme vlastní čísla 0, 3, 4. Dále hledáme vlastní vektory, tj. řešíme homogenní soustavy rovnic s maticí $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} - 3\cdot\mathbf{E}$ a $\mathbf{A} - 4\cdot\mathbf{E}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tedy $\langle(4,5,1),\rangle \setminus \{(0,0,0)\}$ jsou všechny vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 0,

$$\mathbf{A} - 3\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tedy $\langle(5,1,0),\rangle \setminus \{(0,0,0)\}$ jsou všechny vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 3,

$$\mathbf{A} - 4\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

tedy $\langle(5,4,1),\rangle \setminus \{(0,0,0)\}$ jsou všechny vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 4. □

Domácí úkol k 9.písemce (prosím odevzdat do 11.5, ti, co za 9.písemku získali 3 body, dostanou 4. bod, spočítají-li správně část a)): *Buď* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ *nad tělesem* $\mathbf{Z}_5$.

a) Najděte všechna vlastní čísla $\mathbf{A}$*,* *b) najděte všechny vlastní vektory* $\mathbf{A}$.

10 (4.5)**.** Nechť ψ je endomorfismus na vektorové prostoru $\mathbf{R}^3$ nad tělesem reálných čísel daný předpisem $\psi(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$. Existuje-li, najděte bázi B, vůči níž ma endomorfismus ψ diagonální matici a určete $[\psi]_B$.

Nejprve určíme matici endomorfismu $[\psi]_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické bázi K_3 a spočítáme charakteristický polynom $(\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$, tedy áme dvě vlastní čísla 1 a 4. Vyřešíme-li soustavy s maticemi $[\psi]_{K_3} - 1\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ a $[\psi]_{K_3} - 4\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, najdeme bázi $B = ((1, 0, 0), (0, -1, 1), (1, 1, 2))$ prostoru $\mathbf{R}^3$ složenou z vlastních vektorů matice $[\psi]_{K_3}$. Protože jsme pracovali s maticí ψ vzhledem ke kanonické bázi, jedná se vlastní vektory endomorfismu ψ. Proto $[\psi]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. □

Domácí úkol k 10.písemce (prosím odevzdat do 18.5, ti, co za 10.písemku získali 3 body, dostanou 4. bod, spočítají-li správně část a)): *Buď* $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ *nad tělesem* $\mathbf{Z}_7$.

a) Najděte regulární matici $\mathbf{P}$*, aby byla* $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{CP}$ *diagonální,*

b) spočítejte kolik takových matic existuje