INTEGRACE POMOCÍ TRIGONOMETRICKÝCH SUBSTITUCÍ

Spočtěte následující primitivní funkce.

1. $\int \frac{\sin x - \sin x \cos^2 x}{\cos^4 x + 2\cos^2 x + 1}\,\mathrm{d}x$

2. $\int \frac{3\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

3. $\int \frac{2+\cos x}{3+\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$

1. Použijeme substituci $\varphi(x) = \cos x$. Poté $\varphi'(x) = -\sin x$ a tedy pro funkci

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$$

platí

$$\frac{\sin x - \sin x \cos^2 x}{\cos^4 x + 2\cos^2 x + 1} = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Postačí tedy k f nalézt na $\mathbb{R}$ primitivní funkci F, načež bude primitivní funkcí k zadané funkci $F(\varphi(x))$. Platí

$$\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=}$$
$$\overset{C}{=} \arctan x - 2\left(\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x\right) = -\frac{x}{x^2+1}.$$

Z toho pak

$$\int \frac{\sin x - \sin x\cos^2 x}{\cos^4 x + 2\cos^2 x + 1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{\cos x}{\cos^2 x + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Nalezněme nejprve primitivní funkci na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Použijme substituci $t = \tan x$. Potom $\mathrm{d}x = \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t$, z čehož

$$\int \frac{3\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3\tan^2 x + 1}{3 + \tan^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3t^2+1}{(t^2+1)(t^2+3)}\,\mathrm{d}t.$$

Rozložíme

$$\frac{3t^2+1}{(t^2+1)(t^2+3)} = \frac{4}{t^2+3} - \frac{1}{t^2+1},$$

z čehož zintegrujeme

$$\int \frac{3t^2+1}{(t^2+1)(t^2+3)}\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) - \arctan t$$

a dosazením $t = \tan x$ máme

$$\int \frac{3\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{3}}\right) - x = F(x), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Nyní primitivní funkci rozšíříme na celou reálnou osu tím, že hodnoty F na každém z intervalů $\left(\pi\left(k-\frac{1}{2}\right), \pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)$ posuneme o k-násobek vhodné konstanty. Tou musí být

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{3}}\right) - x\right) - \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{3}}\right) - x =$$
$$= \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}},$$

kde využíváme $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{2}$, neboť

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\tan x}{\sqrt{3}} = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2}$$

a funkce arctan je spojitá, takže lze použít větu o limitě složené funkce. Potom můžeme dodefinovat

$$F(x) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{3}}\right) - x + k\cdot\frac{4\pi}{\sqrt{3}}, & x \in \left(\pi\left(k-\frac{1}{2}\right), \pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\right), k \in \mathbb{Z}, \\ \pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{\sqrt{3}} - 1\right), & x = \pi\left(k+\frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Potom musí platit $F'(x) = \frac{3\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}$ na každém z intervalů $\left(\pi\left(k-\frac{1}{2}\right), \pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)$. Dále jsou integrovaná funkce i F spojité, z čehož musí (větou 5.11) derivace zprava $F'_+\left(\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)$ býti rovna $\lim_{t\to\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)^+} F'(t)$, což je ale pouze limita z integrované funkce, tedy (spojitostí) její funkční hodnota v $x = \pi\left(k+\frac{1}{2}\right)$. Analogicky pro derivaci zleva, takže F je skutečně hledanou primitivní funkcí na celém $\mathbb{R}$, z čehož jsou všechny primitivní funkce k integrované funkci tvaru $F(x) + C$.

3. Nalezneme primitivní funkci na intervalu $(-\pi,\pi)$ substitucí $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$. To dává $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$, čímž se integrál upraví na

$$\int \frac{2(1+t^2)+1-t^2}{3(1+t^2)+2t+1-t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int\frac{t^2+3}{(t^2+t+3)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t.$$

Tuto racionální funkci rozložíme na parciální zlomky:

$$\frac{t^2+3}{(t^2+t+3)(t^2+1)}=\frac{At+B}{t^2+t+2}+\frac{Ct+D}{t^2+1}.$$

Roznásobením a porovnáním koeficientů při mocninách t získáme soustavu

$$\begin{aligned}0&=A+C,\\1&=B+C+D,\\0&=A+2C+D,\\3&=B+2D,\end{aligned}$$

jejímž řešením je $A=B=D=1$, $C=-1$. Nyní zintegrujeme

$$\int\frac{t+1}{t^2+t+2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\frac{2t+1}{t^2+t+2}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\sqrt{7}}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{7}}}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}t\overset{C}{=}\frac{1}{2}\log\left(t^2+t+2\right)+\frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right),$$

$$\int\frac{t-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\log\left(t^2+1\right)-\arctan t.$$

Odečtením a dosazením $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ pak máme

$$\int\frac{2+\cos x}{3+\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x\overset{C}{=}\frac{1}{2}\log\left(\frac{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+\tan\left(\frac{x}{2}\right)+2}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1}\right)+\frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{7}}\right)+$$
$$+\arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)=F(x)$$

pro $x\in(-\pi,\pi)$.

Nyní rozšíříme F na nějakou primitivní funkci G na celém $\mathbb{R}$ tak, že bude $G=F+c_k$ na každém z intervalů $(\pi(2k-1),\pi(2k+1))$, $k\in\mathbb{Z}$ (integrovaná funkce je periodická s periodou π, takže taková G k ní určitě bude na takovém intervalu primitivní). Platí

$$\lim_{x\to-\pi^+}F(x)=-\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}+1\right),\qquad\lim_{x\to\pi^-}F(x)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}+1\right),$$

z čehož pro spojitost G musí být $c_{k+1}-c_k=\pi\left(\frac{1}{\sqrt{7}}+1\right)$ pro každé $k\in\mathbb{Z}$. Primitivními funkcemi k $\frac{2+\cos x}{3+\sin x+\cos x}$ na $\mathbb{R}$ jsou tak právě všechny G tvaru

$$G(x)=\begin{cases}\begin{array}{l}\frac{1}{2}\log\left(\frac{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+\tan\left(\frac{x}{2}\right)+2}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1}\right)+\frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{7}}\right)+\\ +\arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+c_0+k\pi\left(\frac{1}{\sqrt{7}}+1\right)\end{array}, & x\in\left(\pi(2k-1),\pi(2k+1)\right),k\in\mathbb{Z},\\ \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}+1\right), & x=\pi(2k+1)\end{cases}$$

pro konstantu $c_0\in\mathbb{R}$. Takováto G je spojitá na $\mathbb{R}$ a na každém z intervalů $(\pi(2k-1),\pi(2k+1))$, $k\in\mathbb{Z}$ je $G'(x)=\frac{2+\cos x}{3+\sin x+\cos x}$, platnost této rovnosti pro $x=\pi(2k+1)$ pak plyne s pomocí spojitosti G i integrované funkce větou 5.11.