29. přednáška, 10. 6. 2020

10.7 Řešení lin. soustav s konst. koeficienty

Lemma 10.15

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ *a vektorová funkce* $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ *je řešením soustavy* $y' = \mathbb{A}y$. *Pak* y *je třídy* $\mathcal{C}^\infty$ *a pro každé* $k \in \mathbf{N}$ *platí* $y^{(k)}(x) = \mathbb{A}^k y(x)$ *pro* $x \in \mathbf{R}$.

Důkaz Lemmatu 10.15

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k.

Důkaz Lemmatu 10.15

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Pro $k = 1$ máme $y' = \mathbb{A}y$ z předpokladu.

Důkaz Lemmatu 10.15

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Pro $k = 1$ máme $y' = \mathbb{A}y$ z předpokladu. Předpokládejme nyní, že pro $k \in \mathbf{N}$ je y je třídy $\mathcal{C}^k$ a $y^{(k)} = \mathbb{A}^k y$.

Důkaz Lemmatu 10.15

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Pro $k = 1$ máme $y' = \mathbb{A}y$ z předpokladu. Předpokládejme nyní, že pro $k \in \mathbf{N}$ je y je třídy $\mathcal{C}^k$ a $y^{(k)} = \mathbb{A}^k y$. Pak máme

$$(\mathbb{A}^k y)' = \mathbb{A}^k y' = \mathbb{A}^k \mathbb{A} y = \mathbb{A}^{k+1} y.$$

Důkaz Lemmatu 10.15

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Pro $k = 1$ máme $y' = \mathbb{A}y$ z předpokladu. Předpokládejme nyní, že pro $k \in \mathbf{N}$ je y je třídy $\mathcal{C}^k$ a $y^{(k)} = \mathbb{A}^k y$. Pak máme

$$\left(\mathbb{A}^k y\right)' = \mathbb{A}^k y' = \mathbb{A}^k \mathbb{A} y = \mathbb{A}^{k+1} y.$$

Tedy je funkce $y^{(k)}$ diferencovatelná

Důkaz Lemmatu 10.15

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Pro $k = 1$ máme $y' = \mathbb{A}y$ z předpokladu. Předpokládejme nyní, že pro $k \in \mathbf{N}$ je y je třídy $\mathcal{C}^k$ a $y^{(k)} = \mathbb{A}^k y$. Pak máme

$$\left(\mathbb{A}^k y\right)' = \mathbb{A}^k y' = \mathbb{A}^k \mathbb{A} y = \mathbb{A}^{k+1} y.$$

Tedy je funkce $y^{(k)}$ diferencovatelná a platí

$$y^{(k+1)}$$

Důkaz Lemmatu 10.15

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Pro $k = 1$ máme $y' = \mathbb{A}y$ z předpokladu. Předpokládejme nyní, že pro $k \in \mathbf{N}$ je y je třídy $\mathcal{C}^k$ a $y^{(k)} = \mathbb{A}^k y$. Pak máme

$$\left(\mathbb{A}^k y\right)' = \mathbb{A}^k y' = \mathbb{A}^k \mathbb{A} y = \mathbb{A}^{k+1} y.$$

Tedy je funkce $y^{(k)}$ diferencovatelná a platí

$$y^{(k+1)} = \left(\mathbb{A}^k y\right)'$$

Důkaz Lemmatu 10.15

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Pro $k = 1$ máme $y' = \mathbb{A}y$ z předpokladu. Předpokládejme nyní, že pro $k \in \mathbf{N}$ je y je třídy $\mathcal{C}^k$ a $y^{(k)} = \mathbb{A}^k y$. Pak máme

$$\left(\mathbb{A}^k y\right)' = \mathbb{A}^k y' = \mathbb{A}^k \mathbb{A} y = \mathbb{A}^{k+1} y.$$

Tedy je funkce $y^{(k)}$ diferencovatelná a platí

$$y^{(k+1)} = \left(\mathbb{A}^k y\right)' = \mathbb{A}^{k+1} y.$$

Důkaz Lemmatu 10.15

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Pro $k = 1$ máme $y' = \mathbb{A}y$ z předpokladu. Předpokládejme nyní, že pro $k \in \mathbf{N}$ je y je třídy $\mathcal{C}^k$ a $y^{(k)} = \mathbb{A}^k y$. Pak máme

$$\left(\mathbb{A}^k y\right)' = \mathbb{A}^k y' = \mathbb{A}^k \mathbb{A} y = \mathbb{A}^{k+1} y.$$

Tedy je funkce $y^{(k)}$ diferencovatelná a platí

$$y^{(k+1)} = \left(\mathbb{A}^k y\right)' = \mathbb{A}^{k+1} y.$$

Funkce y je tedy třídy $\mathcal{C}^{k+1}$ a platí požadovaný vztah.

Důkaz Lemmatu 10.15

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Pro $k = 1$ máme $y' = \mathbb{A}y$ z předpokladu. Předpokládejme nyní, že pro $k \in \mathbf{N}$ je y je třídy $\mathcal{C}^k$ a $y^{(k)} = \mathbb{A}^k y$. Pak máme

$$\left(\mathbb{A}^k y\right)' = \mathbb{A}^k y' = \mathbb{A}^k \mathbb{A} y = \mathbb{A}^{k+1} y.$$

Tedy je funkce $y^{(k)}$ diferencovatelná a platí

$$y^{(k+1)} = \left(\mathbb{A}^k y\right)' = \mathbb{A}^{k+1} y.$$

Funkce y je tedy třídy $\mathcal{C}^{k+1}$ a platí požadovaný vztah. $\square$

Definice

Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme λ**-maticí**.

Definice

Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme **λ-maticí**. **Řádkovými úpravami λ-matice** rozumíme:

- záměnu dvou řádků,

Definice

Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme **λ-maticí**. **Řádkovými úpravami λ-matice** rozumíme:

- záměnu dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovou konstantou,

Definice

Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme **λ-maticí**. **Řádkovými úpravami λ-matice** rozumíme:

- záměnu dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovou konstantou,
- přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde $P(\lambda)$ je polynom v proměnné λ.

Lemma 10.16

Nechť $\Lambda = (P_1, \ldots, P_n)^T$ *je* λ*-matice.*

Lemma 10.16

Nechť $\Lambda = (P_1, \ldots, P_n)^T$ *je* λ*-matice. Potom ji lze konečnou posloupností řádkových úprav převést na* λ*-matici* $\tilde{\Lambda} = (\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n)^T$*, kde nejvýše jeden z polynomů* $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n$ *je nenulový.*

Důkaz Lemmatu 10.16

Předpokládejme, že $\Lambda \neq 0$, v opačném případě není co dokazovat.

Důkaz Lemmatu 10.16

Předpokládejme, že $\Lambda \neq 0$, v opačném případě není co dokazovat. Pak je následující definice korektní.

$$k(\Lambda) = \min\Big\{\operatorname{st} P_i;\ i \in \{1, \dots, n\}, P_i \neq 0\Big\}.$$

Důkaz Lemmatu 10.16

Předpokládejme, že $\Lambda \neq 0$, v opačném případě není co dokazovat. Pak je následující definice korektní.

$$k(\Lambda) = \min\big\{\operatorname{st} P_i;\ i \in \{1, \ldots, n\}, P_i \neq 0\big\}.$$

Použijeme matematickou indukci podle $k(\Lambda)$. Je-li $k(\Lambda) = 0$.

Důkaz Lemmatu 10.16

Předpokládejme, že $\Lambda \neq 0$, v opačném případě není co dokazovat. Pak je následující definice korektní.

$$k(\Lambda) = \min\Big\{\operatorname{st} P_i;\; i \in \{1, \ldots, n\}, P_i \neq 0\Big\}.$$

Použijeme matematickou indukci podle $k(\Lambda)$. Je-li $k(\Lambda) = 0$. Pak lze předpokládat, že $P_1(\lambda) = c \neq 0$.

Důkaz Lemmatu 10.16

Předpokládejme, že $\Lambda \neq 0$, v opačném případě není co dokazovat. Pak je následující definice korektní.

$$k(\Lambda) = \min\Big\{\operatorname{st} P_i;\ i \in \{1, \ldots, n\}, P_i \neq 0\Big\}.$$

Použijeme matematickou indukci podle $k(\Lambda)$. Je-li $k(\Lambda) = 0$. Pak lze předpokládat, že $P_1(\lambda) = c \neq 0$. Potom lze pomocí třetí řádkové úpravy převést Λ na $(c, 0, \ldots, 0)^T$.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechna $\Lambda \neq 0$ splňující $k(\Lambda) < k$, kde $k > 0$.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechna $\Lambda \neq 0$ splňující $k(\Lambda) < k$, kde $k > 0$. Uvažujme matici Λ splňující $k(\Lambda) = k$.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechna $\Lambda \neq 0$ splňující $k(\Lambda) < k$, kde $k > 0$. Uvažujme matici Λ splňující $k(\Lambda) = k$. Opět můžeme předpokládat, že $\operatorname{st} P_1 = k$.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechna $\Lambda \neq 0$ splňující $k(\Lambda) < k$, kde $k > 0$. Uvažujme matici Λ splňující $k(\Lambda) = k$. Opět můžeme předpokládat, že $\operatorname{st} P_1 = k$. Pokud P_j, $j \neq 1$, je nenulový prvek Λ, Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechna $\Lambda \neq 0$ splňující $k(\Lambda) < k$, kde $k > 0$. Uvažujme matici Λ splňující $k(\Lambda) = k$. Opět můžeme předpokládat, že $\operatorname{st} P_1 = k$. Pokud P_j, $j \neq 1$, je nenulový prvek Λ, pak můžeme psát $P_j = N \cdot P_1 + P_j^*$, kde N, P_j^* jsou polynomy a $\operatorname{st} P_j^* < \operatorname{st} P_1$.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechna $\Lambda \neq 0$ splňující $k(\Lambda) < k$, kde $k > 0$. Uvažujme matici Λ splňující $k(\Lambda) = k$. Opět můžeme předpokládat, že $\operatorname{st} P_1 = k$. Pokud P_j, $j \neq 1$, je nenulový prvek Λ, pak můžeme psát $P_j = N \cdot P_1 + P_j^*$, kde N, P_j^* jsou polynomy a $\operatorname{st} P_j^* < \operatorname{st} P_1$. Pomocí třetí řádkové úpravy lze prvek P_j nahradit prvkem P_j^*.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechna $\Lambda \neq 0$ splňující $k(\Lambda) < k$, kde $k > 0$. Uvažujme matici Λ splňující $k(\Lambda) = k$. Opět můžeme předpokládat, že $\operatorname{st} P_1 = k$. Pokud P_j, $j \neq 1$, je nenulový prvek Λ, pak můžeme psát $P_j = N \cdot P_1 + P_j^*$, kde N, P_j^* jsou polynomy a $\operatorname{st} P_j^* < \operatorname{st} P_1$. Pomocí třetí řádkové úpravy lze prvek P_j nahradit prvkem P_j^*. Matici Λ tak lze převést na matici $\Lambda^* = (P_1, P_2^*, \ldots, P_n^*)^T$, Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechna $\Lambda \neq 0$ splňující $k(\Lambda) < k$, kde $k > 0$. Uvažujme matici Λ splňující $k(\Lambda) = k$. Opět můžeme předpokládat, že $\operatorname{st} P_1 = k$. Pokud P_j, $j \neq 1$, je nenulový prvek Λ, pak můžeme psát $P_j = N \cdot P_1 + P_j^*$, kde N, P_j^* jsou polynomy a $\operatorname{st} P_j^* < \operatorname{st} P_1$. Pomocí třetí řádkové úpravy lze prvek P_j nahradit prvkem P_j^*. Matici Λ tak lze převést na matici $\Lambda^* = (P_1, P_2^*, \ldots, P_n^*)^T$, kde je buď jediný nenulový polynom P_1, Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechna $\Lambda \neq 0$ splňující $k(\Lambda) < k$, kde $k > 0$. Uvažujme matici Λ splňující $k(\Lambda) = k$. Opět můžeme předpokládat, že $\operatorname{st} P_1 = k$. Pokud P_j, $j \neq 1$, je nenulový prvek Λ, pak můžeme psát $P_j = N \cdot P_1 + P_j^*$, kde N, P_j^* jsou polynomy a $\operatorname{st} P_j^* < \operatorname{st} P_1$. Pomocí třetí řádkové úpravy lze prvek P_j nahradit prvkem P_j^*. Matici Λ tak lze převést na matici $\Lambda^* = (P_1, P_2^*, \dots, P_n^*)^T$, kde je buď jediný nenulový polynom P_1, nebo $k(\Lambda^*) < k$ a lze použít indukční předpoklad.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro všechna $\Lambda \neq 0$ splňující $k(\Lambda) < k$, kde $k > 0$. Uvažujme matici Λ splňující $k(\Lambda) = k$. Opět můžeme předpokládat, že $\operatorname{st} P_1 = k$. Pokud P_j, $j \neq 1$, je nenulový prvek Λ, pak můžeme psát $P_j = N \cdot P_1 + P_j^*$, kde N, P_j^* jsou polynomy a $\operatorname{st} P_j^* < \operatorname{st} P_1$. Pomocí třetí řádkové úpravy lze prvek P_j nahradit prvkem P_j^*. Matici Λ tak lze převést na matici $\Lambda^* = (P_1, P_2^*, \dots, P_n^*)^T$, kde je buď jediný nenulový polynom P_1, nebo $k(\Lambda^*) < k$ a lze použít indukční předpoklad. $\square$

Věta 10.17

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$.

Věta 10.17

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. *Pak lze* λ*-matici* $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ *převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou* λ*-matici.*

Věta 10.17

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$*. Pak lze* λ*-matici* $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ *převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou* λ*-matici. Výsledná* λ*-matice má na diagonále nenulové polynomy, součet jejichž stupňů je n.*

Důkaz Věty 10.17

Nejprve ukážeme, že každou λ-matici lze převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou λ-matici.

Důkaz Věty 10.17

Nejprve ukážeme, že každou λ-matici lze převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou λ-matici. Použijeme matematickou indukci podle n.

Důkaz Věty 10.17

Nejprve ukážeme, že každou λ-matici lze převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou λ-matici. Použijeme matematickou indukci podle n. Je-li $n = 1$, je tvrzení zřejmé.

Důkaz Věty 10.17

Nejprve ukážeme, že každou λ-matici lze převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou λ-matici. Použijeme matematickou indukci podle n. Je-li $n = 1$, je tvrzení zřejmé.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbf{N}$.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbf{N}$. Nechť Λ je λ-matice typu $(n+1) \times (n+1)$.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbf{N}$. Nechť Λ je λ-matice typu $(n+1) \times (n+1)$. Na Λ aplikujeme řádkové úpravy, které převedou Λ na $\tilde{\Lambda}$, jejíž první sloupec má tvar $(\tilde{P}, 0, \dots, 0)^T$ (Lemma 10.16).

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbf{N}$. Nechť Λ je λ-matice typu $(n+1) \times (n+1)$. Na Λ aplikujeme řádkové úpravy, které převedou Λ na $\tilde{\Lambda}$, jejíž první sloupec má tvar $(\tilde{P}, 0, \ldots, 0)^T$ (Lemma 10.16).
Na submatici matice $\tilde{\Lambda}$, která vznikne vynecháním první řádku a prvního sloupce, pak použijeme indukční předpoklad.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbf{N}$. Nechť Λ je λ-matice typu $(n+1) \times (n+1)$. Na Λ aplikujeme řádkové úpravy, které převedou Λ na $\tilde{\Lambda}$, jejíž první sloupec má tvar $(\tilde{P}, 0, \ldots, 0)^T$ (Lemma 10.16).
Na submatici matice $\tilde{\Lambda}$, která vznikne vynecháním první řádku a prvního sloupce, pak použijeme indukční předpoklad.
Rozmysleme si nyní druhé tvrzení.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbf{N}$. Nechť Λ je λ-matice typu $(n+1) \times (n+1)$. Na Λ aplikujeme řádkové úpravy, které převedou Λ na $\tilde{\Lambda}$, jejíž první sloupec má tvar $(\tilde{P}, 0, \ldots, 0)^T$ (Lemma 10.16).
Na submatici matice $\tilde{\Lambda}$, která vznikne vynecháním první řádku a prvního sloupce, pak použijeme indukční předpoklad.
Rozmysleme si nyní druhé tvrzení. Nechť $\tilde{\Lambda}$ je horní trojúhelníková λ-matice vzniklá z $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ pomocí řádkových úprav.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbf{N}$. Nechť Λ je λ-matice typu $(n+1) \times (n+1)$. Na Λ aplikujeme řádkové úpravy, které převedou Λ na $\tilde{\Lambda}$, jejíž první sloupec má tvar $(\tilde{P}, 0, \ldots, 0)^T$ (Lemma 10.16).
Na submatici matice $\tilde{\Lambda}$, která vznikne vynecháním první řádku a prvního sloupce, pak použijeme indukční předpoklad.
Rozmysleme si nyní druhé tvrzení. Nechť $\tilde{\Lambda}$ je horní trojúhelníková λ-matice vzniklá z $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ pomocí řádkových úprav. Potom $\det \tilde{\Lambda} = c \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$ pro nějaké $c \in \mathbf{R}$ nenulové (toto plyne z vlastností determinantů a polynomů).

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbf{N}$. Nechť Λ je λ-matice typu $(n+1) \times (n+1)$. Na Λ aplikujeme řádkové úpravy, které převedou Λ na $\tilde{\Lambda}$, jejíž první sloupec má tvar $(\tilde{P}, 0, \dots, 0)^T$ (Lemma 10.16).
Na submatici matice $\tilde{\Lambda}$, která vznikne vynecháním první řádku a prvního sloupce, pak použijeme indukční předpoklad.
Rozmysleme si nyní druhé tvrzení. Nechť $\tilde{\Lambda}$ je horní trojúhelníková λ-matice vzniklá z $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ pomocí řádkových úprav. Potom $\det \tilde{\Lambda} = c \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$ pro nějaké $c \in \mathbf{R}$ nenulové (toto plyne z vlastností determinantů a polynomů). Polynom $\lambda \mapsto c \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$ je n-tého stupně, a tak dostáváme požadované tvrzení.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbf{N}$. Nechť Λ je λ-matice typu $(n+1) \times (n+1)$. Na Λ aplikujeme řádkové úpravy, které převedou Λ na $\tilde{\Lambda}$, jejíž první sloupec má tvar $(\tilde{P}, 0, \dots, 0)^T$ (Lemma 10.16).
Na submatici matice $\tilde{\Lambda}$, která vznikne vynecháním první řádku a prvního sloupce, pak použijeme indukční předpoklad.
Rozmysleme si nyní druhé tvrzení. Nechť $\tilde{\Lambda}$ je horní trojúhelníková λ-matice vzniklá z $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ pomocí řádkových úprav. Potom $\det \tilde{\Lambda} = c \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$ pro nějaké $c \in \mathbf{R}$ nenulové (toto plyne z vlastností determinantů a polynomů). Polynom $\lambda \mapsto c \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$ je n-tého stupně, a tak dostáváme požadované tvrzení. $\square$

Označení

- Nechť $P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ je polynom a $y\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je funkce mající vlastní derivaci n-tého řádu na $\mathbf{R}$. Potom symbol $P(\frac{d}{dx})y$ značí funkci

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y.$$

Označení

- Nechť $\mathbb{P} = (P_{ij})$ je λ-matice typu $n \times n$.

Označení

- Nechť $\mathbb{P} = (P_{ij})$ je λ-matice typu $n \times n$. Soustavou diferenciálních rovnic odpovídající $\mathbb{P}$ budeme rozumět soustavu

$$
\begin{aligned}
P_{11}(\frac{d}{dx})y_1 + \cdots + P_{1n}(\frac{d}{dx})y_n &= 0,\\
P_{21}(\frac{d}{dx})y_1 + \cdots + P_{2n}(\frac{d}{dx})y_n &= 0,\\
&\vdots\\
P_{n1}(\frac{d}{dx})y_1 + \cdots + P_{nn}(\frac{d}{dx})y_n &= 0.
\end{aligned}
$$

Lemma 10.18

Nechť P, Q *jsou polynomy a* $y \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbf{R})$.

Lemma 10.18

Nechť P, Q jsou polynomy a $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$. Pak

(a) $(P+Q)\left(\frac{d}{dx}\right)y = P\left(\frac{d}{dx}\right)y + Q\left(\frac{d}{dx}\right)y,$

Lemma 10.18

Nechť P, Q *jsou polynomy a* $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$. *Pak*

(a) $(P+Q)\left(\frac{d}{dx}\right)y = P\left(\frac{d}{dx}\right)y + Q\left(\frac{d}{dx}\right)y$,

(b) $(PQ)\left(\frac{d}{dx}\right)y = P\left(\frac{d}{dx}\right)\left(Q\left(\frac{d}{dx}\right)\right)y$.

(a) Tvrzení je zřejmé.

(a) Tvrzení je zřejmé.
(b) Pro $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k$ a $Q(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j$ máme

(a) Tvrzení je zřejmé.
(b) Pro $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k$ a $Q(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j$ máme

$$(PQ)\left(\frac{d}{dx}\right)y$$

(a) Tvrzení je zřejmé.
(b) Pro $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k$ a $Q(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j$ máme

$$(PQ)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y = \left(\left(\sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j\right)\right)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y$$

(a) Tvrzení je zřejmé.
(b) Pro $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k$ a $Q(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j$ máme

$$
\begin{aligned}
(PQ)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y &= \left(\left(\sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j\right)\right)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y \\
&= \left(\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_k b_j \lambda^{k+j}\right)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y
\end{aligned}
$$

(a) Tvrzení je zřejmé.
(b) Pro $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k$ a $Q(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j$ máme

$$(PQ)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y = \left(\left(\sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j\right)\right)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_k b_j \lambda^{k+j}\right)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_k b_j y^{(k+j)}$$

(a) Tvrzení je zřejmé.
(b) Pro $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k$ a $Q(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j$ máme

$$
\begin{aligned}
(PQ)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y &= \left(\left(\sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j\right)\right)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y \\
&= \left(\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_k b_j \lambda^{k+j}\right)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_k b_j y^{(k+j)} \\
&= \sum_{k=0}^{m} a_k \left(\sum_{j=0}^{n} b_j y^{(j)}\right)^{(k)} = \sum_{k=0}^{m} a_k \left(Q\left(\tfrac{d}{dx}\right)y\right)^{(k)}
\end{aligned}
$$

(a) Tvrzení je zřejmé.
(b) Pro $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k$ a $Q(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j$ máme

$$
\begin{aligned}
(PQ)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y &= \left(\left(\sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j\right)\right)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y \\
&= \left(\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_k b_j \lambda^{k+j}\right)\left(\tfrac{d}{dx}\right)y = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_k b_j y^{(k+j)} \\
&= \sum_{k=0}^{m} a_k \left(\sum_{j=0}^{n} b_j y^{(j)}\right)^{(k)} = \sum_{k=0}^{m} a_k \left(Q\left(\tfrac{d}{dx}\right)y\right)^{(k)} \\
&= P\left(\tfrac{d}{dx}\right)\left(Q\left(\tfrac{d}{dx}\right)y\right),
\end{aligned}
$$

a tedy platí (b). $\square$

Věta 10.19

Nechť λ*-matice* $\tilde{\mathbb{P}}$ *typu* $n \times n$ *vznikla konečnou posloupností řádkových úprav z* λ*-matice* $\mathbb{P}$*.*

Věta 10.19

Nechť λ-matice $\tilde{\mathbb{P}}$ typu $n \times n$ vznikla konečnou posloupností řádkových úprav z λ-matice $\mathbb{P}$. Potom vektorová funkce $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ třídy $\mathcal{C}^\infty$ je řešením soustavy odpovídající matici $\mathbb{P}$, právě když je řešením soustavy odpovídající $\tilde{\mathbb{P}}$.

Důkaz Věty 10.19

Stačí ukázat, že pokud y řeší soustavu odpovídající $\mathbb{P}$, pak řeší i soustavu odpovídající $\tilde{\mathbb{P}}$, která vznikla z $\mathbb{P}$ aplikací jedné řádkové úpravy (řádkové úpravy jsou invertibilní).

Důkaz Věty 10.19

Stačí ukázat, že pokud y řeší soustavu odpovídající $\mathbb{P}$, pak řeší i soustavu odpovídající $\tilde{\mathbb{P}}$, která vznikla z $\mathbb{P}$ aplikací jedné řádkové úpravy (řádkové úpravy jsou invertibilní).
Toto jistě platí, pokud vyměníme dva řádky či řádek vynásobíme nenulovou konstantou.

Uvažme nyní řádkovou úpravu spočívající v přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku.

Uvažme nyní řádkovou úpravu spočívající v přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že přičítáme $P(\lambda)$-násobek druhého řádku k řádku prvnímu.

Uvažme nyní řádkovou úpravu spočívající v přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že přičítáme $P(\lambda)$-násobek druhého řádku k řádku prvnímu. Máme

$$P_{11}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{1n}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n = 0,$$
$$P_{21}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{2n}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n = 0.$$

Potom

$$(P_{11} + P \cdot P_{21})\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + (P_{1n} + P \cdot P_{2n})\left(\frac{d}{dx}\right)y_n =$$

Potom

$$(P_{11} + P \cdot P_{21})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + (P_{1n} + P \cdot P_{2n})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n =$$
$$= P_{11}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{1n}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n$$

Potom

$$
\begin{aligned}
&(P_{11} + P \cdot P_{21})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + (P_{1n} + P \cdot P_{2n})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n = \\
&= P_{11}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{1n}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n \\
&\quad + (P \cdot P_{21})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + (P \cdot P_{2n})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n
\end{aligned}
$$

Potom

$$
\begin{aligned}
&(P_{11} + P \cdot P_{21})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \dots + (P_{1n} + P \cdot P_{2n})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n = \\
&= P_{11}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \dots + P_{1n}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n \\
&\quad + (P \cdot P_{21})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \dots + (P \cdot P_{2n})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n \\
&= 0 + P\left(\tfrac{d}{dx}\right)\left(P_{21}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \dots + P_{2n}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n\right)
\end{aligned}
$$

Potom

$$
\begin{aligned}
&(P_{11} + P \cdot P_{21})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + (P_{1n} + P \cdot P_{2n})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n = \\
&= P_{11}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{1n}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n \\
&\quad + (P \cdot P_{21})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + (P \cdot P_{2n})\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n \\
&= 0 + P\left(\tfrac{d}{dx}\right)\left(P_{21}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{2n}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n\right) \\
&= 0 + P\left(\tfrac{d}{dx}\right)0 = 0.
\end{aligned}
$$

Potom

$$
\begin{aligned}
&(P_{11} + P \cdot P_{21})\left(\tfrac{d}{dx}\right) y_1 + \cdots + (P_{1n} + P \cdot P_{2n})\left(\tfrac{d}{dx}\right) y_n = \\
&= P_{11}\left(\tfrac{d}{dx}\right) y_1 + \cdots + P_{1n}\left(\tfrac{d}{dx}\right) y_n \\
&\quad + (P \cdot P_{21})\left(\tfrac{d}{dx}\right) y_1 + \cdots + (P \cdot P_{2n})\left(\tfrac{d}{dx}\right) y_n \\
&= 0 + P\left(\tfrac{d}{dx}\right) \left(P_{21}\left(\tfrac{d}{dx}\right) y_1 + \cdots + P_{2n}\left(\tfrac{d}{dx}\right) y_n\right) \\
&= 0 + P\left(\tfrac{d}{dx}\right) 0 = 0.
\end{aligned}
$$

$\square$

Homogenní soustava $y' = \mathbb{A}y$ odpovídá λ-matici $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$, kterou pomocí konečné posloupnosti řádkových úprav převedeme na horní trojúhelníkovou λ-matici

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ 0 & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & P_{nn} \end{pmatrix}.$$

Homogenní soustava $y' = \mathbb{A}y$ odpovídá λ-matici $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$, kterou pomocí konečné posloupnosti řádkových úprav převedeme na horní trojúhelníkovou λ-matici

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ 0 & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & P_{nn} \end{pmatrix}.$$

Soustavu

$$\begin{aligned} P_{11}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{1n}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n &= 0, \\ &\vdots \\ P_{nn}\left(\tfrac{d}{dx}\right)y_n &= 0, \end{aligned}$$

pak vyřešíme postupně od n-té rovnice k první.

Příklad

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + 5y_2 \\ y_2' &= -2y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

Příklad

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + 5y_2 \\ y_2' &= -2y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

$$\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix}$$

Příklad

$$
\begin{aligned}
y_1' &= 4y_1 + 5y_2 \\
y_2' &= -2y_1 - 2y_2
\end{aligned}
$$

$$
\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\lambda + 1 \\ 0 & \lambda^2 - 2\lambda + 2 \end{pmatrix}
$$

Příklad

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + 5y_2 \\ y_2' &= -2y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

$$\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\lambda + 1 \\ 0 & \lambda^2 - 2\lambda + 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 + \frac{1}{2}y_2' + y_2 &= 0 \\ y_2'' - 2y_2' + 2y_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$y_2 = \alpha_1 e^t \sin t + \alpha_2 e^t \cos t$$
$$y_1 = \left(-\frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2\right) e^t \sin t + \left(-\frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{3}{2}\alpha_2\right) e^t \cos t$$

$$y_2 = \alpha_1 e^t \sin t + \alpha_2 e^t \cos t$$

$$y_1 = \left(-\frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2\right) e^t \sin t + \left(-\frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{3}{2}\alpha_2\right) e^t \cos t$$