27. přednáška, 2. 6. 2020

Derivace funkcí s hodnotami v **C**

Nechť $\varphi\colon (a,b) \to \mathbf{C}$.

Derivace funkcí s hodnotami v **C**

Nechť $\varphi\colon (a,b) \to \mathbf{C}$. Označme $\varphi_1(x) = \operatorname{Re} \varphi(x)$ a $\varphi_2(x) = \operatorname{Im} \varphi(x)$.

Derivace funkcí s hodnotami v $\mathbf{C}$

Nechť $\varphi\colon (a,b) \to \mathbf{C}$. Označme $\varphi_1(x) = \operatorname{Re}\varphi(x)$ a $\varphi_2(x) = \operatorname{Im}\varphi(x)$. Pak definujeme $\varphi'(x) = \varphi_1'(x) + i\varphi_2'(x)$, pokud $\varphi_1'(x), \varphi_2'(x)$ existují vlastní.

Derivace funkcí s hodnotami v **C**

Nechť $\varphi\colon (a,b) \to \mathbf{C}$. Označme $\varphi_1(x) = \operatorname{Re}\varphi(x)$ a $\varphi_2(x) = \operatorname{Im}\varphi(x)$. Pak definujeme $\varphi'(x) = \varphi_1'(x) + i\varphi_2'(x)$, pokud $\varphi_1'(x), \varphi_2'(x)$ existují vlastní.
Nechť $\varphi, \psi\colon (a,b) \to \mathbf{C}$ mají v bodě $x \in (a,b)$ derivaci.

Derivace funkcí s hodnotami v **C**

Nechť $\varphi\colon (a,b) \to \mathbf{C}$. Označme $\varphi_1(x) = \operatorname{Re} \varphi(x)$ a $\varphi_2(x) = \operatorname{Im} \varphi(x)$. Pak definujeme $\varphi'(x) = \varphi_1'(x) + i\varphi_2'(x)$, pokud $\varphi_1'(x), \varphi_2'(x)$ existují vlastní.
Nechť $\varphi, \psi\colon (a,b) \to \mathbf{C}$ mají v bodě $x \in (a,b)$ derivaci. Potom platí

- $(\varphi + \psi)'(x) = \varphi'(x) + \psi'(x)$,

Derivace funkcí s hodnotami v **C**

Nechť $\varphi\colon (a,b) \to \mathbf{C}$. Označme $\varphi_1(x) = \operatorname{Re}\varphi(x)$ a $\varphi_2(x) = \operatorname{Im}\varphi(x)$. Pak definujeme $\varphi'(x) = \varphi_1'(x) + i\varphi_2'(x)$, pokud $\varphi_1'(x), \varphi_2'(x)$ existují vlastní.
Nechť $\varphi, \psi\colon (a,b) \to \mathbf{C}$ mají v bodě $x \in (a,b)$ derivaci.
Potom platí

- $(\varphi + \psi)'(x) = \varphi'(x) + \psi'(x)$,
- $(\varphi\psi)'(x) = \varphi'(x)\psi(x) + \varphi(x)\psi'(x)$.

(a) ... zřejmé

(a) ... zřejmé

(b)

$$(\varphi\psi)'(x) = (\varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2)'(x) + i(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1)'(x)$$

(a) ... zřejmé

(b)

$$\begin{aligned}(\varphi\psi)'(x) &= (\varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2)'(x) + i(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1)'(x)\\ &= (\varphi_1'\psi_1 + \varphi_1\psi_1' - \varphi_2'\psi_2 - \varphi_2\psi_2')(x)\end{aligned}$$

(a) ... zřejmé
(b)

$$\begin{aligned}(\varphi\psi)'(x) &= (\varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2)'(x) + i(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1)'(x) \\ &= (\varphi_1'\psi_1 + \varphi_1\psi_1' - \varphi_2'\psi_2 - \varphi_2\psi_2')(x) \\ &\quad + i(\varphi_1'\psi_2 + \varphi_1\psi_2' + \varphi_2'\psi_1 + \varphi_2\psi_1')(x)\end{aligned}$$

(a) ... zřejmé
(b)

$$\begin{aligned}(\varphi\psi)'(x) &= (\varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2)'(x) + i(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1)'(x) \\ &= (\varphi_1'\psi_1 + \varphi_1\psi_1' - \varphi_2'\psi_2 - \varphi_2\psi_2')(x) \\ &\quad + i(\varphi_1'\psi_2 + \varphi_1\psi_2' + \varphi_2'\psi_1 + \varphi_2\psi_1')(x) \\ &= \varphi'(x)\psi(x) + \varphi(x)\psi'(x)\end{aligned}$$

(a) ... zřejmé
(b)

$$\begin{aligned}(\varphi\psi)'(x) &= (\varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2)'(x) + i(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1)'(x)\\ &= (\varphi_1'\psi_1 + \varphi_1\psi_1' - \varphi_2'\psi_2 - \varphi_2\psi_2')(x)\\ &\quad + i(\varphi_1'\psi_2 + \varphi_1\psi_2' + \varphi_2'\psi_1 + \varphi_2\psi_1')(x)\\ &= \varphi'(x)\psi(x) + \varphi(x)\psi'(x)\end{aligned}$$

(a) ... zřejmé

(b)

$$
\begin{aligned}
(\varphi\psi)'(x) &= (\varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2)'(x) + i(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1)'(x) \\
&= (\varphi_1'\psi_1 + \varphi_1\psi_1' - \varphi_2'\psi_2 - \varphi_2\psi_2')(x) \\
&\quad + i(\varphi_1'\psi_2 + \varphi_1\psi_2' + \varphi_2'\psi_1 + \varphi_2\psi_1')(x) \\
&= \varphi'(x)\psi(x) + \varphi(x)\psi'(x)
\end{aligned}
$$

- Nechť $\varphi, \psi\colon (a,b) \to \mathbf{C}$ mají v bodě $x \in (a,b)$ vlastní n-tou derivaci. Potom platí

$$(\varphi\psi)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^{(n-k)}(x)\psi^{(k)}(x).$$

- Nechť $\varphi, \psi\colon (a,b) \to \mathbf{C}$ mají v bodě $x \in (a,b)$ vlastní n-tou derivaci. Potom platí

$$(\varphi\psi)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^{(n-k)}(x)\psi^{(k)}(x).$$

- $(ct^k)' = ckt^{k-1},\ c \in \mathbf{C}, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$

- Nechť $\varphi, \psi\colon (a, b) \to \mathbf{C}$ mají v bodě $x \in (a, b)$ vlastní n-tou derivaci. Potom platí

$$(\varphi\psi)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^{(n-k)}(x)\psi^{(k)}(x).$$

- $(ct^k)' = ckt^{k-1},\ c \in \mathbf{C}, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$
- $(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t},\ \lambda \in \mathbf{C}$

- Nechť $\varphi, \psi \colon (a, b) \to \mathbf{C}$ mají v bodě $x \in (a, b)$ vlastní n-tou derivaci. Potom platí

$$(\varphi\psi)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^{(n-k)}(x)\psi^{(k)}(x).$$

- $(ct^k)' = ckt^{k-1},\ c \in \mathbf{C}, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$
- $(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t},\ \lambda \in \mathbf{C} \qquad [e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)]$

Lemma 10.5

Nechť Q je polynom a $\omega \in \mathbf{C}$ je jeho kořen násobnosti $q \in \mathbf{N}$.

Lemma 10.5

Nechť Q je polynom a $\omega \in \mathbf{C}$ je jeho kořen násobnosti $q \in \mathbf{N}$. Potom platí $Q(\omega) = Q'(\omega) = \cdots = Q^{(q-1)}(\omega) = 0$.

Lemma 10.5

Nechť Q je polynom a $\omega \in \mathbf{C}$ je jeho kořen násobnosti $q \in \mathbf{N}$. Potom platí $Q(\omega) = Q'(\omega) = \cdots = Q^{(q-1)}(\omega) = 0$.

Důkaz.

Polynom Q lze zapsat ve tvaru

$$Q(z) = (z - \omega)^q \cdot R(z),$$

kde R je opět polynom. Odtud již tvrzení snadno plyne.

Lemma 10.5

Nechť Q je polynom a $\omega \in \mathbf{C}$ je jeho kořen násobnosti $q \in \mathbf{N}$. Potom platí $Q(\omega) = Q'(\omega) = \cdots = Q^{(q-1)}(\omega) = 0$.

Důkaz.

Polynom Q lze zapsat ve tvaru

$$Q(z) = (z - \omega)^q \cdot R(z),$$

kde R je opět polynom. Odtud již tvrzení snadno plyne. $\square$

Důkaz Věty 10.4

$$L(y) = \sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)}$$

Důkaz Věty 10.4

$$L(y) = \sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)}$$

$$\chi(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j$$

$$L(t \mapsto t^k e^{\lambda t}) = \sum_{j=0}^{n} a_j (t^k e^{\lambda t})^{(j)}$$

$$L(t \mapsto t^k e^{\lambda t}) = \sum_{j=0}^{n} a_j (t^k e^{\lambda t})^{(j)}$$

$$
\begin{aligned}
L(t \mapsto t^k e^{\lambda t}) &= \sum_{j=0}^{n} a_j (t^k e^{\lambda t})^{(j)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} (e^{\lambda t})^{(j-s)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L(t \mapsto t^k e^{\lambda t}) &= \sum_{j=0}^{n} a_j (t^k e^{\lambda t})^{(j)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} (e^{\lambda t})^{(j-s)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L(t \mapsto t^k e^{\lambda t}) &= \sum_{j=0}^{n} a_j (t^k e^{\lambda t})^{(j)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} (e^{\lambda t})^{(j-s)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} {\color{red} a_j} \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{s=0}^{j} {\color{red} a_j} \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L(t \mapsto t^k e^{\lambda t}) &= \sum_{j=0}^{n} a_j (t^k e^{\lambda t})^{(j)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} (e^{\lambda t})^{(j-s)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{s=0}^{j} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=s}^{n} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L(t \mapsto t^k e^{\lambda t}) &= \sum_{j=0}^{n} a_j (t^k e^{\lambda t})^{(j)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} (e^{\lambda t})^{(j-s)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{s=0}^{j} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=s}^{n} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t}
\end{aligned}
$$

$$0 \le s \le j \le n$$

$$
\begin{aligned}
L(t \mapsto t^k e^{\lambda t}) &= \sum_{j=0}^{n} a_j (t^k e^{\lambda t})^{(j)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} (e^{\lambda t})^{(j-s)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{s=0}^{j} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=s}^{n} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t}
\end{aligned}
$$

$0 \leq s \leq j \leq n$

$$= \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=s}^{n} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=s}^{n} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \sum_{j=s}^{n} a_j \cdot j \cdots (j-s+1) \lambda^{j-s}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=s}^{n} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \sum_{j=s}^{n} a_j \cdot j \cdots (j-s+1) \lambda^{j-s} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \chi^{(s)}(\lambda)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=s}^{n} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \sum_{j=s}^{n} a_j \cdot j \cdots (j-s+1) \lambda^{j-s} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \chi^{(s)}(\lambda) \\
&= \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \chi^{(s)}(\lambda) + \sum_{s=k+1}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \chi^{(s)}(\lambda)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=s}^{n} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \sum_{j=s}^{n} a_j \cdot j \cdots (j-s+1) \lambda^{j-s} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \chi^{(s)}(\lambda) \\
&= \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \underbrace{\chi^{(s)}(\lambda)}_{=0} + \sum_{s=k+1}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \chi^{(s)}(\lambda)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=s}^{n} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t}$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \sum_{j=s}^{n} a_j \cdot j \cdots (j-s+1) \lambda^{j-s}$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \chi^{(s)}(\lambda)$$

$$= \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \underbrace{\chi^{(s)}(\lambda)}_{=0} + \sum_{s=k+1}^{n} \frac{1}{s!} \underbrace{(t^k)^{(s)}}_{=0} e^{\lambda t} \chi^{(s)}(\lambda)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=s}^{n} a_j \binom{j}{s} (t^k)^{(s)} \lambda^{j-s} e^{\lambda t} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \sum_{j=s}^{n} a_j \cdot j \cdots (j-s+1) \lambda^{j-s} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \chi^{(s)}(\lambda) \\
&= \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!} (t^k)^{(s)} e^{\lambda t} \underbrace{\chi^{(s)}(\lambda)}_{=0} + \sum_{s=k+1}^{n} \frac{1}{s!} \underbrace{(t^k)^{(s)}}_{=0} e^{\lambda t} \chi^{(s)}(\lambda) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Důkaz lineární nezávislosti

Důkaz lineární nezávislosti

Uvažujme lineární kombinaci funkcí z našeho systému, která je na intervalu (a, b) rovna nulové funkci.

Důkaz lineární nezávislosti

Uvažujme lineární kombinaci funkcí z našeho systému, která je na intervalu (a, b) rovna nulové funkci. Předpokládejme, že funkce $t^k e^{\alpha t} \cos \beta t$ a $t^k e^{\alpha t} \sin \beta t$ se v této lineární kombinaci vyskytují s koeficienty a a b.

Důkaz lineární nezávislosti

Uvažujme lineární kombinaci funkcí z našeho systému, která je na intervalu (a, b) rovna nulové funkci. Předpokládejme, že funkce $t^k e^{\alpha t} \cos \beta t$ a $t^k e^{\alpha t} \sin \beta t$ se v této lineární kombinaci vyskytují s koeficienty a a b. Platí

$$
\begin{aligned}
&a t^k e^{\alpha t} \cos \beta t + b t^k e^{\alpha t} \sin \beta t \\
&= a t^k e^{\alpha t} \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} + b t^k e^{\alpha t} \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i} \\
&= \frac{1}{2}(a - bi) t^k e^{(\alpha + i\beta)t} + \frac{1}{2}(a + bi) t^k e^{(\alpha - i\beta)t}.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Dále platí, že

$$a = b = 0 \Leftrightarrow a - bi = a + bi = 0. \tag{9}$$

Naši lineární kombinaci lze díky (8) tedy přepsat do tvaru

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + P_2(t)e^{\omega_2 t} + \cdots + P_k(t)e^{\omega_k t}$$

kde $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \mathbb{C}$ jsou navzájem různá komplexní čísla a $P_1, \ldots, P_k$ jsou polynomy.

Naši lineární kombinaci lze díky (8) tedy přepsat do tvaru

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + P_2(t)e^{\omega_2 t} + \cdots + P_k(t)e^{\omega_k t}$$

kde $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \mathbb{C}$ jsou navzájem různá komplexní čísla a $P_1, \ldots, P_k$ jsou polynomy. Podle předpokladu platí

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + P_2(t)e^{\omega_2 t} + \cdots + P_k(t)e^{\omega_k t} = 0$$

pro každé $t \in (a, b)$.

Naši lineární kombinaci lze díky (8) tedy přepsat do tvaru

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + P_2(t)e^{\omega_2 t} + \cdots + P_k(t)e^{\omega_k t}$$

kde $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \mathbb{C}$ jsou navzájem různá komplexní čísla a $P_1, \ldots, P_k$ jsou polynomy. Podle předpokladu platí

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + P_2(t)e^{\omega_2 t} + \cdots + P_k(t)e^{\omega_k t} = 0$$

pro každé $t \in (a, b)$. K důkazu lineární nezávislosti našeho systému stačí dokázat, že $P_1 = P_2 = \cdots = P_k = 0$,

Naši lineární kombinaci lze díky (8) tedy přepsat do tvaru

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + P_2(t)e^{\omega_2 t} + \cdots + P_k(t)e^{\omega_k t}$$

kde $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \mathbb{C}$ jsou navzájem různá komplexní čísla a $P_1, \ldots, P_k$ jsou polynomy. Podle předpokladu platí

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + P_2(t)e^{\omega_2 t} + \cdots + P_k(t)e^{\omega_k t} = 0$$

pro každé $t \in (a, b)$. K důkazu lineární nezávislosti našeho systému stačí dokázat, že $P_1 = P_2 = \cdots = P_k = 0$, protože pak budou všechny koeficienty polynomů $P_1, \ldots, P_k$ nulové a díky pozorování (9) obdržíme, že i koeficienty použité v naší lineární kombinaci jsou nulové.

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k.

Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Pokud $k = 1$ a pro každé $t \in (a, b)$ platí $P_1(t)e^{\omega_1 t} = 0$, Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Pokud $k = 1$ a pro každé $t \in (a, b)$ platí $P_1(t)e^{\omega_1 t} = 0$, pak nutně $P_1(t) = 0$ pro každé $t \in (a, b)$, a tedy $P_1 = 0$.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k \in \mathbf{N}$.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k \in \mathbf{N}$. Povšimněme si nejprve, že pokud P je polynom a $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k \in \mathbf{N}$. Povšimněme si nejprve, že pokud P je polynom a $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, pak

$$\begin{aligned} (P(x)e^{\omega x})' &= P'(x)e^{\omega x} + P(x)\omega e^{\omega x} \\ &= (P'(x) + \omega P(x))e^{\omega x} = R(x)e^{\omega x}, \end{aligned}$$

kde R je polynom stejného stupně jako P.

Předpokládejme nyní, že pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + \cdots + P_{k+1}(t)e^{\omega_{k+1} t} = 0,$$

Předpokládejme nyní, že pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + \cdots + P_{k+1}(t)e^{\omega_{k+1} t} = 0,$$

tedy pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + P_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} + P_{k+1}(t) = 0,$$

Předpokládejme nyní, že pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + \cdots + P_{k+1}(t)e^{\omega_{k+1} t} = 0,$$

tedy pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + P_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} + P_{k+1}(t) = 0,$$

Po opakovaném derivování dostaneme pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$R_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + R_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} = 0,$$

Předpokládejme nyní, že pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + \cdots + P_{k+1}(t)e^{\omega_{k+1} t} = 0,$$

tedy pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + P_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} + P_{k+1}(t) = 0,$$

Po opakovaném derivování dostaneme pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$R_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + R_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} = 0,$$

kde $\mathrm{st}\, R_1 = \mathrm{st}\, P_1, \ldots, \mathrm{st}\, R_k = \mathrm{st}\, P_k$.

Předpokládejme nyní, že pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + \cdots + P_{k+1}(t)e^{\omega_{k+1} t} = 0,$$

tedy pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + P_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} + P_{k+1}(t) = 0,$$

Po opakovaném derivování dostaneme pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$R_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + R_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} = 0,$$

kde $\operatorname{st} R_1 = \operatorname{st} P_1, \ldots, \operatorname{st} R_k = \operatorname{st} P_k$. Podle indukčního předpokladu musí být $R_1 = R_2 = \cdots = R_k = 0$,

Předpokládejme nyní, že pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + \cdots + P_{k+1}(t)e^{\omega_{k+1} t} = 0,$$

tedy pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + P_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} + P_{k+1}(t) = 0,$$

Po opakovaném derivování dostaneme pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$R_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + R_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} = 0,$$

kde $\operatorname{st} R_1 = \operatorname{st} P_1, \ldots, \operatorname{st} R_k = \operatorname{st} P_k$. Podle indukčního předpokladu musí být $R_1 = R_2 = \cdots = R_k = 0$, a tedy $P_1 = P_2 = \cdots = P_k = 0$.

Předpokládejme nyní, že pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + \cdots + P_{k+1}(t)e^{\omega_{k+1} t} = 0,$$

tedy pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + P_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} + P_{k+1}(t) = 0,$$

Po opakovaném derivování dostaneme pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$R_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + R_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} = 0,$$

kde $\operatorname{st} R_1 = \operatorname{st} P_1, \ldots, \operatorname{st} R_k = \operatorname{st} P_k$. Podle indukčního předpokladu musí být $R_1 = R_2 = \cdots = R_k = 0$, a tedy $P_1 = P_2 = \cdots = P_k = 0$. Potom

$$\forall t \in (a, b) \colon P_{k+1}(t)e^{\omega_{k+1} t} = 0,$$

Předpokládejme nyní, že pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + \cdots + P_{k+1}(t)e^{\omega_{k+1} t} = 0,$$

tedy pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + P_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} + P_{k+1}(t) = 0,$$

Po opakovaném derivování dostaneme pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$R_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + R_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} = 0,$$

kde $\operatorname{st} R_1 = \operatorname{st} P_1, \ldots, \operatorname{st} R_k = \operatorname{st} P_k$. Podle indukčního předpokladu musí být $R_1 = R_2 = \cdots = R_k = 0$, a tedy $P_1 = P_2 = \cdots = P_k = 0$. Potom

$$\forall t \in (a, b)\colon\ P_{k+1}(t)e^{\omega_{k+1} t} = 0,$$

a tedy i $P_{k+1} = 0$.

Předpokládejme nyní, že pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + \cdots + P_{k+1}(t)e^{\omega_{k+1} t} = 0,$$

tedy pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$P_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + P_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} + P_{k+1}(t) = 0,$$

Po opakovaném derivování dostaneme pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$R_1(t)e^{(\omega_1 - \omega_{k+1})t} + \cdots + R_k(t)e^{(\omega_k - \omega_{k+1})t} = 0,$$

kde $\operatorname{st} R_1 = \operatorname{st} P_1, \ldots, \operatorname{st} R_k = \operatorname{st} P_k$. Podle indukčního předpokladu musí být $R_1 = R_2 = \cdots = R_k = 0$, a tedy $P_1 = P_2 = \cdots = P_k = 0$. Potom

$$\forall t \in (a, b)\colon\ P_{k+1}(t)e^{\omega_{k+1} t} = 0,$$

a tedy i $P_{k+1} = 0$.

Lemma 10.6

Nechť $y_1, \ldots, y_n$ tvoří fundamentální systém rovnice (7). Potom matice

$$U(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \ldots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

je regulární pro každé $t \in \mathbf{R}$.

Důkaz Lemmatu 10.6

Důkaz Lemmatu 10.6

Pokud $U(t_0)$ není regulární pro nějaké $t_0 \in \mathbf{R}$, pak existuje nenulový vektor $d \in \mathbf{R}^n$ takový, že $U(t_0)d = 0$.

Důkaz Lemmatu 10.6

Pokud $U(t_0)$ není regulární pro nějaké $t_0 \in \mathbf{R}$, pak existuje nenulový vektor $d \in \mathbf{R}^n$ takový, že $U(t_0)d = 0$. Položme $z = d_1 y_1 + \cdots + d_n y_n$.

Důkaz Lemmatu 10.6

Pokud $U(t_0)$ není regulární pro nějaké $t_0 \in \mathbf{R}$, pak existuje nenulový vektor $d \in \mathbf{R}^n$ takový, že $U(t_0)d = 0$. Položme $z = d_1 y_1 + \cdots + d_n y_n$. Potom z řeší rovnici (7) a splňuje

$$
\begin{aligned}
z(t_0) &= d_1 y_1(t_0) + \cdots + d_n y_n(t_0) = 0, \\
z'(t_0) &= d_1 y_1'(t_0) + \cdots + d_n y_n'(t_0) = 0, \\
&\vdots \\
z^{(n-1)}(t_0) &= d_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \cdots + d_n y_n^{(n-1)}(t_0) = 0.
\end{aligned}
$$

Důkaz Lemmatu 10.6

Pokud $U(t_0)$ není regulární pro nějaké $t_0 \in \mathbf{R}$, pak existuje nenulový vektor $d \in \mathbf{R}^n$ takový, že $U(t_0)d = 0$. Položme $z = d_1 y_1 + \cdots + d_n y_n$. Potom z řeší rovnici (7) a splňuje

$$\begin{aligned} z(t_0) &= d_1 y_1(t_0) + \cdots + d_n y_n(t_0) = 0, \\ z'(t_0) &= d_1 y_1'(t_0) + \cdots + d_n y_n'(t_0) = 0, \\ &\vdots \\ z^{(n-1)}(t_0) &= d_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \cdots + d_n y_n^{(n-1)}(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Podle Věty 10.2 máme $z = 0$ na $\mathbf{R}$.

Důkaz Lemmatu 10.6

Pokud $U(t_0)$ není regulární pro nějaké $t_0 \in \mathbf{R}$, pak existuje nenulový vektor $d \in \mathbf{R}^n$ takový, že $U(t_0)d = 0$. Položme $z = d_1 y_1 + \cdots + d_n y_n$. Potom z řeší rovnici (7) a splňuje

$$\begin{aligned} z(t_0) &= d_1 y_1(t_0) + \cdots + d_n y_n(t_0) = 0, \\ z'(t_0) &= d_1 y_1'(t_0) + \cdots + d_n y_n'(t_0) = 0, \\ &\vdots \\ z^{(n-1)}(t_0) &= d_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \cdots + d_n y_n^{(n-1)}(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Podle Věty 10.2 máme $z = 0$ na $\mathbf{R}$. Funkce $y_1, \ldots, y_n$ tvoří fundamentální systém, a proto je $d_1 = d_2 = \cdots = d_n = 0$.

Důkaz Lemmatu 10.6

Pokud $U(t_0)$ není regulární pro nějaké $t_0 \in \mathbf{R}$, pak existuje nenulový vektor $d \in \mathbf{R}^n$ takový, že $U(t_0)d = 0$. Položme $z = d_1 y_1 + \cdots + d_n y_n$. Potom z řeší rovnici (7) a splňuje

$$
\begin{aligned}
z(t_0) &= d_1 y_1(t_0) + \cdots + d_n y_n(t_0) = 0, \\
z'(t_0) &= d_1 y_1'(t_0) + \cdots + d_n y_n'(t_0) = 0, \\
&\vdots \\
z^{(n-1)}(t_0) &= d_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \cdots + d_n y_n^{(n-1)}(t_0) = 0.
\end{aligned}
$$

Podle Věty 10.2 máme $z = 0$ na $\mathbf{R}$. Funkce $y_1, \ldots, y_n$ tvoří fundamentální systém, a proto je $d_1 = d_2 = \cdots = d_n = 0$. To je ale spor s nenulovostí vektoru d, čímž je důkaz dokončen. $\square$

Metoda variace konstant

Hledejme řešení rovnice (6) ve tvaru

$$y(t) = c_1(t)y_1(t) + \cdots + c_n(t)y_n(t), \quad t \in (a, b),$$

Metoda variace konstant

Hledejme řešení rovnice (6) ve tvaru

$$y(t) = c_1(t)y_1(t) + \cdots + c_n(t)y_n(t), \quad t \in (a, b),$$

kde $c_1, \ldots, c_n$ jsou spojitě diferencovatelné funkce na (a, b) a $\{y_1, \ldots, y_n\}$ je fundamentální systém rovnice (7).

Počítejme

$$y' = c_1 y_1' + \cdots + c_n y_n' + c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n$$

a položme $c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n = 0$.

Počítejme

$$y' = c_1 y_1' + \cdots + c_n y_n' + c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n$$

a položme $c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n = 0$. Dále

$$y'' = c_1 y_1'' + \cdots + c_n y_n'' + c_1' y_1' + \cdots + c_n' y_n'$$

a opět položíme $c_1' y_1' + \cdots + c_n' y_n' = 0$.

Počítejme

$$y' = c_1 y_1' + \cdots + c_n y_n' + c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n$$

a položme $c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n = 0$. Dále

$$y'' = c_1 y_1'' + \cdots + c_n y_n'' + c_1' y_1' + \cdots + c_n' y_n'$$

a opět položíme $c_1' y_1' + \cdots + c_n' y_n' = 0$. Pokračováním tohoto procesu se dobereme až k rovnici

$$y^{(n)} = c_1 y_1^{(n)} + \cdots + c_n y_n^{(n)} + c_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)}.$$

Dosadíme do (6) a dostaneme tuto sadu podmínek:

$$\begin{aligned} c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n &= 0, \\ &\vdots \\ c_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-2)} &= 0, \\ c_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} &= f, \end{aligned}$$

Dosadíme do (6) a dostaneme tuto sadu podmínek:

$$
\begin{aligned}
c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n &= 0, \\
&\vdots \\
c_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-2)} &= 0, \\
c_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} &= f,
\end{aligned}
$$

neboli

$$
U(t) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}.
$$

Funkci c_i' vypočteme z předchozí rovnice pomocí Cramerova pravidla

Funkci c_i' vypočteme z předchozí rovnice pomocí Cramerova pravidla

$$c_i'(t) = \frac{1}{\det U(t)} \cdot \begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_{i-1}(t) & 0 & y_{i+1}(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \dots & y_{i-1}'(t) & 0 & y_{i+1}'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ y_1^{(n-2)}(t) & \dots & y_{i-1}^{(n-2)}(t) & 0 & y_{i+1}^{(n-2)}(t) & \dots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_{i-1}^{(n-1)}(t) & f(t) & y_{i+1}^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Funkci c_i' vypočteme z předchozí rovnice pomocí Cramerova pravidla

$$c_i'(t) = \frac{1}{\det U(t)} \cdot \begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_{i-1}(t) & 0 & y_{i+1}(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \dots & y_{i-1}'(t) & 0 & y_{i+1}'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ y_1^{(n-2)}(t) & \dots & y_{i-1}^{(n-2)}(t) & 0 & y_{i+1}^{(n-2)}(t) & \dots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_{i-1}^{(n-1)}(t) & f(t) & y_{i+1}^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Pravá strana předchozího vztahu je spojitá funkce v t, takže hledaná $c_i, i = 1, \dots, n$, můžeme nalézt jako primitivní funkci k pravé straně.

Metoda speciální pravé strany

Věta 10.7

Nechť

$$f(t) = e^{\mu t} \cdot (P(t) \cos \nu t + Q(t) \sin \nu t)\,,$$

kde $\mu, \nu \in \mathbf{R}$ *a* P, Q *jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice* (6) *ve tvaru*

$$y_0(t) = t^m e^{\mu t} \cdot (R(t) \cos \nu t + S(t) \sin \nu t)\,,$$

kde R, S *jsou vhodné polynomy stupně ne většího než* $\max\{$*stupeň* P*, stupeň* $Q\}$ *a* $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ *udává, jakou násobnost má číslo* $\mu + i\nu$ *jakožto kořen charakteristického polynomu.*

Metoda speciální pravé strany

Věta 10.7

Nechť

$$f(t) = e^{\mu t} \cdot (P(t) \cos \nu t + Q(t) \sin \nu t)\,,$$

kde $\mu, \nu \in \mathbf{R}$ *a* P, Q *jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice* (6) *ve tvaru*

$$y_0(t) = t^m e^{\mu t} \cdot (R(t) \cos \nu t + S(t) \sin \nu t)\,,$$

kde R, S *jsou vhodné polynomy stupně ne většího než* $\max\{$*stupeň* P*, stupeň* $Q\}$ *a* $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ *udává, jakou násobnost má číslo* $\mu + i\nu$ *jakožto kořen charakteristického polynomu.*

Bez důkazu.