23. přednáška, 14. 5. 2020

9.3 Aplikace určitého integrálu

Definice

Křivkou budeme rozumět spojité zobrazení $\varphi\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ ($n \in \mathbf{N}$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$).

Definice

Křivkou budeme rozumět spojité zobrazení $\varphi\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ ($n \in \mathbf{N}$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$). Křivkou **třídy** $\mathcal{C}^1$ rozumíme křivku $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ takovou, že φ_i' je spojité na $[a,b]$, $i = 1, \dots, n$, přičemž v krajních bodech $[a,b]$ symbol $\varphi_i'(x)$ značí příslušnou jednostrannou derivaci.

Definice

Nechť $\varphi\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ je křivka.

Definice

Nechť $\varphi\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ je křivka. **Délkou křivky** φ rozumíme hodnotu

$$L(\varphi) = \sup\{L(\varphi, D);\ D \text{ je dělení intervalu } [a,b]\},$$

kde pro dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ intervalu $[a,b]$ definujeme

$$L(\varphi, D) = \sum_{j=1}^{k} \text{vzdálenost}\,(\varphi(x_{j-1}), \varphi(x_j)).$$

Lemma 9.33

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$*,* $a < b$*,* $n \in \mathbf{N}$*,* $f = (f_1, \dots, f_n) \colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ *je křivka.*

Lemma 9.33

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $n \in \mathbf{N}$, $f = (f_1, \dots, f_n)\colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ *je křivka. Potom platí*

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|,$$

Lemma 9.33

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $n \in \mathbf{N}$, $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ *je křivka. Potom platí*

$$\left\| \int_a^b f \right\| \le \int_a^b \|f\|,$$

kde

$$\int_a^b f = \left[\int_a^b f_1, \ldots, \int_a^b f_n \right].$$

a

$$\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Lemma 9.33

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $n \in \mathbf{N}$, $f = (f_1, \dots, f_n) \colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ *je křivka. Potom platí*

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|,$$

kde

$$\int_a^b f = \left[\int_a^b f_1, \dots, \int_a^b f_n \right].$$

a

$$\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Lemma 9.33

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $n \in \mathbf{N}$, $f = (f_1, \dots, f_n)\colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ *je křivka. Potom platí*

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|,$$

kde

$$\int_a^b f = \left[\int_a^b f_1, \dots, \int_a^b f_n \right].$$

a

$$\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Důkaz Lemmatu 9.33

Funkce $t \mapsto \|f(t)\|$ je spojitá na $[a, b]$, a proto $\int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$ je konvergentní.

Důkaz Lemmatu 9.33

Funkce $t \mapsto \|f(t)\|$ je spojitá na $[a, b]$, a proto $\int_a^b \|f(t)\| \, \mathrm{d}t$ je konvergentní. Položme

$$y = \left[\int_a^b f_1(t) \, \mathrm{d}t, \dots, \int_a^b f_n(t) \, \mathrm{d}t \right].$$

Pak máme z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

Pak máme z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

Pak máme z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t$$

Pak máme z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i f_i(t)\Big)\,\mathrm{d}t$$

Pak máme z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i f_i(t)\Big)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i^2(t)\Big)}\,\mathrm{d}t$$

Pak máme z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i f_i(t)\Big)\,\mathrm{d}t \le \int_a^b \sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i^2(t)\Big)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \|y\|\|f(t)\|\,\mathrm{d}t$$

Pak máme z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i f_i(t)\Big)\,\mathrm{d}t \le \int_a^b \sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i^2(t)\Big)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \|y\|\|f(t)\|\,\mathrm{d}t = \|y\| \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Pak máme z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i f_i(t)\Big)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i^2(t)\Big)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \|y\|\|f(t)\|\,\mathrm{d}t = \|y\| \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Pokud $y = 0$, pak dokazovaná nerovnost zjevně platí.

Pak máme z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i f_i(t) \Big)\,\mathrm{d}t \le \int_a^b \sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \Big) \Big(\sum_{i=1}^{n} f_i^2(t) \Big)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \|y\| \|f(t)\|\,\mathrm{d}t = \|y\| \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Pokud $y = 0$, pak dokazovaná nerovnost zjevně platí. Pokud $\|y\| > 0$, pak právě provedený výpočet opět dává dokazovanou nerovnost.

Pak máme z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i f_i(t)\Big)\,\mathrm{d}t \le \int_a^b \sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i^2(t)\Big)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \|y\|\|f(t)\|\,\mathrm{d}t = \|y\| \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Pokud $y = 0$, pak dokazovaná nerovnost zjevně platí. Pokud $\|y\| > 0$, pak právě provedený výpočet opět dává dokazovanou nerovnost. $\square$

Věta 9.34

Nechť $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)\colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ *je křivka třídy* $\mathcal{C}^1$. *Pak platí*

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \cdots + (\varphi_n'(t))^2}\, dt.$$

Důkaz Věty 9.34

Mějme libovolné dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^{k}$ dáno.

Důkaz Věty 9.34

Mějme libovolné dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ dáno. Pak platí díky Lemmatu 9.33

$$\sum_{j=1}^{k} \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\|$$

Důkaz Věty 9.34

Mějme libovolné dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^{k}$ dáno. Pak platí díky Lemmatu 9.33

$$\sum_{j=1}^{k} \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| = \sum_{j=1}^{k} \| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t\|$$

Důkaz Věty 9.34

Mějme libovolné dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^{k}$ dáno. Pak platí díky Lemmatu 9.33

$$\sum_{j=1}^{k} \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| = \sum_{j=1}^{k} \| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \|$$

Důkaz Věty 9.34

Mějme libovolné dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^{k}$ dáno. Pak platí díky Lemmatu 9.33

$$\sum_{j=1}^{k} \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| = \sum_{j=1}^{k} \| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t)\, \mathrm{d}t\|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\varphi'(t)\|\, \mathrm{d}t$$

Důkaz Věty 9.34

Mějme libovolné dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ dáno. Pak platí díky Lemmatu 9.33

$$\sum_{j=1}^{k} \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| = \sum_{j=1}^{k} \| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t\|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Důkaz Věty 9.34

Mějme libovolné dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ dáno. Pak platí díky Lemmatu 9.33

$$\sum_{j=1}^{k} \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| = \sum_{j=1}^{k} \Big\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \Big\|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Odtud plyne $L(\varphi) \leq \int_a^b \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t$.

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon > 0$.

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou φ_i' stejnoměrně spojité na $[a, b]$,

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou φ_i' stejnoměrně spojité na $[a, b]$, existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou φ_i' stejnoměrně spojité na $[a, b]$, existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\forall s, t \in [a, b], |s - t| < \delta \colon |\varphi_i'(t) - \varphi_i'(s)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou φ_i' stejnoměrně spojité na $[a, b]$, existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\forall s, t \in [a, b], |s - t| < \delta \colon |\varphi_i'(t) - \varphi_i'(s)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Nechť nyní $D = \{x_j\}_{j=0}^{k}$ je dělení $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$.

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou φ_i' stejnoměrně spojité na $[a, b]$, existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\forall s, t \in [a, b], |s - t| < \delta \colon |\varphi_i'(t) - \varphi_i'(s)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Nechť nyní $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ je dělení $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Potom pro $t \in [x_{j-1}, x_j]$ platí

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou φ_i' stejnoměrně spojité na $[a, b]$, existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí

$$\forall s, t \in [a, b], |s - t| < \delta \colon |\varphi_i'(t) - \varphi_i'(s)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Nechť nyní $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ je dělení $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Potom pro $t \in [x_{j-1}, x_j]$ platí $\|\varphi'(t)\| \leq \|\varphi'(x_j)\| + \varepsilon$.

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou φ_i' stejnoměrně spojité na $[a, b]$, existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\forall s, t \in [a, b], |s - t| < \delta \colon |\varphi_i'(t) - \varphi_i'(s)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Nechť nyní $D = \{x_j\}_{j=0}^{k}$ je dělení $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Potom pro $t \in [x_{j-1}, x_j]$ platí $\|\varphi'(t)\| \leq \|\varphi'(x_j)\| + \varepsilon$. Dostáváme tedy

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\varphi'(t)\| \, \mathrm{d}t - \varepsilon(x_j - x_{j-1}) \leq \|\varphi'(x_j)\|(x_j - x_{j-1})$$

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou φ_i' stejnoměrně spojité na $[a, b]$, existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\forall s, t \in [a, b], |s - t| < \delta \colon |\varphi_i'(t) - \varphi_i'(s)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Nechť nyní $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ je dělení $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Potom pro $t \in [x_{j-1}, x_j]$ platí $\|\varphi'(t)\| \le \|\varphi'(x_j)\| + \varepsilon$. Dostáváme tedy

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\varphi'(t)\| \,\mathrm{d}t - \varepsilon(x_j - x_{j-1}) \le \|\varphi'(x_j)\|(x_j - x_{j-1})$$

$$= \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi'(t) + \varphi'(x_j) - \varphi'(t)) \,\mathrm{d}t \right\|$$

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou φ_i' stejnoměrně spojité na $[a, b]$, existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí

$$\forall s, t \in [a, b], |s - t| < \delta \colon |\varphi_i'(t) - \varphi_i'(s)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Nechť nyní $D = \{x_j\}_{j=0}^{k}$ je dělení $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Potom pro $t \in [x_{j-1}, x_j]$ platí $\|\varphi'(t)\| \leq \|\varphi'(x_j)\| + \varepsilon$. Dostáváme tedy

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\varphi'(t)\| \, \mathrm{d}t - \varepsilon(x_j - x_{j-1}) \leq \|\varphi'(x_j)\|(x_j - x_{j-1})$$

$$= \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi'(t) + \varphi'(x_j) - \varphi'(t)) \, \mathrm{d}t \right\|$$

$$\leq \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t) \, \mathrm{d}t \right\| + \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi'(x_j) - \varphi'(t)) \, \mathrm{d}t \right\|$$

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou φ_i' stejnoměrně spojité na $[a, b]$, existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\forall s, t \in [a, b], |s - t| < \delta \colon |\varphi_i'(t) - \varphi_i'(s)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Nechť nyní $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ je dělení $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Potom pro $t \in [x_{j-1}, x_j]$ platí $\|\varphi'(t)\| \leq \|\varphi'(x_j)\| + \varepsilon$. Dostáváme tedy

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\varphi'(t)\| \, \mathrm{d}t - \varepsilon(x_j - x_{j-1}) \leq \|\varphi'(x_j)\|(x_j - x_{j-1})$$

$$= \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi'(t) + \varphi'(x_j) - \varphi'(t)) \, \mathrm{d}t \right\|$$

$$\leq \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t) \, \mathrm{d}t \right\| + \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi'(x_j) - \varphi'(t)) \, \mathrm{d}t \right\|$$

$$\leq \left\| \varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1}) \right\| + \varepsilon(x_j - x_{j-1}).$$

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon > 0$. Poněvadž jsou φ_i' stejnoměrně spojité na $[a,b]$, existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \{1,\dots,n\}$ platí

$$\forall s,t \in [a,b], |s-t| < \delta \colon |\varphi_i'(t) - \varphi_i'(s)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Nechť nyní $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ je dělení $[a,b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Potom pro $t \in [x_{j-1}, x_j]$ platí $\|\varphi'(t)\| \le \|\varphi'(x_j)\| + \varepsilon$. Dostáváme tedy

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t - \varepsilon(x_j - x_{j-1}) \le \|\varphi'(x_j)\|(x_j - x_{j-1})$$

$$= \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi'(t) + \varphi'(x_j) - \varphi'(t))\,\mathrm{d}t \right\|$$

$$\le \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \right\| + \left\| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi'(x_j) - \varphi'(t))\,\mathrm{d}t \right\|$$

$$\le \left\| \varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1}) \right\| + \varepsilon(x_j - x_{j-1}).$$

Dostáváme tedy

$$\int_a^b \|\varphi'(t)\| \, \mathrm{d}t \leq \sum_{j=1}^{k} \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| + 2\varepsilon(b-a)$$

Dostáváme tedy

$$\int_a^b \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t \leq \sum_{j=1}^{k} \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| + 2\varepsilon(b-a)$$

$$\leq L(\varphi) + 2\varepsilon(b-a).$$

Protože ε bylo voleno libovolně, dostáváme $\int_a^b \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t \leq L(\varphi)$.

Dostáváme tedy

$$\int_a^b \|\varphi'(t)\| \, \mathrm{d}t \leq \sum_{j=1}^{k} \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| + 2\varepsilon(b-a)$$

$$\leq L(\varphi) + 2\varepsilon(b-a).$$

Protože ε bylo voleno libovolně, dostáváme
$\int_a^b \|\varphi'(t)\| \, \mathrm{d}t \leq L(\varphi)$. $\square$

Příklad

(a) Je-li $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$, pak

$$L(\varphi)$$

Příklad

(a) Je-li $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$, pak

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, \mathrm{d}t$$

Příklad

(a) Je-li $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$, pak

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Příklad

(a) Je-li $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$, pak

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Příklad

(a) Je-li $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$, pak

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\, \mathrm{d}t$$

Příklad

(a) Je-li $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$, pak

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi.$$

Příklad

(a) Je-li $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$, pak

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi.$$

(b) Je-li f spojitě diferencovatelná funkce na $[a, b]$, pak parametrizace jejího grafu pomocí $\varphi(t) = [t, f(t)]$, $t \in [a, b]$, dává, že délka grafu funkce f je rovna $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\,\mathrm{d}t$.

Věta 9.35 (objem a povrch rotačního tělesa)

Nechť f je spojitá a nezáporná na intervalu $[a, b]$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$.

Věta 9.35 (objem a povrch rotačního tělesa)

Nechť f je spojitá a nezáporná na intervalu $[a, b]$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Označme

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3;\ x \in [a, b],\ \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}.$$

Věta 9.35 (objem a povrch rotačního tělesa)

Nechť f je spojitá a nezáporná na intervalu $[a,b]$, $a,b\in\mathbf{R}$, $a<b$. Označme

$$T=\{[x,y,z]\in\mathbf{R}^3;\ x\in[a,b],\ \sqrt{y^2+z^2}\leq f(x)\}.$$

Pak

$$\mathit{Objem}\,(T)=\pi\int_a^b f(x)^2\,dx.$$

Věta 9.35 (objem a povrch rotačního tělesa)

Nechť f je spojitá a nezáporná na intervalu $[a, b]$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Označme

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3;\ x \in [a, b],\ \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}.$$

Pak

$$\mathit{Objem}\,(T) = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx.$$

Je-li navíc f' spojitá na $[a, b]$, pak

$$\mathit{Povrch\ pláště}\,(T) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Věta 9.36 (integrální kritérium)

Nechť f je nezáporná nerostoucí spojitá funkce na $[n_0, \infty)$, kde $n_0 \in \mathbf{N}$. Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $a_n = f(n)$, $n \geq n_0$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$ konverguje.

Důkaz Věty 9.36

Důkaz Věty 9.36

Uvažujme $n_1 \in \mathbf{N}$, $n_1 \geq n_0$,

Důkaz Věty 9.36

Uvažujme $n_1 \in \mathbf{N}$, $n_1 \geq n_0$, a dělení $D = \{j\}_{j=n_0}^{n_1}$ intervalu $[n_0, n_1]$.

Důkaz Věty 9.36

Uvažujme $n_1 \in \mathbf{N}$, $n_1 \geq n_0$, a dělení $D = \{j\}_{j=n_0}^{n_1}$ intervalu $[n_0, n_1]$. Funkce f je nerostoucí,

Důkaz Věty 9.36

Uvažujme $n_1 \in \mathbf{N}$, $n_1 \geq n_0$, a dělení $D = \{j\}_{j=n_0}^{n_1}$ intervalu $[n_0, n_1]$. Funkce f je nerostoucí, a tedy

$$\overline{S}(f, D) = a_{n_0} + \cdots + a_{n_1 - 1} = \sum_{i=n_0}^{n_1 - 1} a_i,$$

Důkaz Věty 9.36

Uvažujme $n_1 \in \mathbf{N}$, $n_1 \geq n_0$, a dělení $D = \{j\}_{j=n_0}^{n_1}$ intervalu $[n_0, n_1]$. Funkce f je nerostoucí, a tedy

$$\overline{S}(f, D) = a_{n_0} + \cdots + a_{n_1-1} = \sum_{i=n_0}^{n_1-1} a_i,$$

$$\underline{S}(f, D) = a_{n_0+1} + \cdots + a_{n_1} = \sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i.$$

Protože je f spojitá na $[n_0, n_1]$, platí

$$\sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i$$

Protože je f spojitá na $[n_0, n_1]$, platí

$$\sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i = \underline{S}(f, D) \leq (R) \int_{n_0}^{n_1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Protože je f spojitá na $[n_0, n_1]$, platí

$$\sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i = \underline{S}(f, D) \leq (R) \int_{n_0}^{n_1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= (N) \int_{n_0}^{n_1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Protože je f spojitá na $[n_0, n_1]$, platí

$$\sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i = \underline{S}(f, D) \leq (R) \int_{n_0}^{n_1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= (N) \int_{n_0}^{n_1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D)$$

Protože je f spojitá na $[n_0, n_1]$, platí

$$\sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i = \underline{S}(f, D) \le (R) \int_{n_0}^{n_1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= (N) \int_{n_0}^{n_1} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{S}(f, D) = \sum_{i=n_0}^{n_1-1} a_i.$$

Předpokládejme nyní, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Předpokládejme nyní, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak je funkce

$$F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad t \in [n_0, \infty)$$

primitivní k f na (n_0, ∞),

Předpokládejme nyní, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak je funkce

$$F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad t \in [n_0, \infty)$$

primitivní k f na (n_0, ∞), a tedy pro každé $n_1 > n_0$ máme

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Předpokládejme nyní, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak je funkce

$$F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad t \in [n_0, \infty)$$

primitivní k f na (n_0, ∞), a tedy pro každé $n_1 > n_0$ máme

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(n_0)$$

Předpokládejme nyní, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak je funkce

$$F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad t \in [n_0, \infty)$$

primitivní k f na (n_0, ∞), a tedy pro každé $n_1 > n_0$ máme

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(n_0) = \lim_{x\to\infty} F(x)$$

Předpokládejme nyní, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak je funkce

$$F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad t \in [n_0, \infty)$$

primitivní k f na (n_0, ∞), a tedy pro každé $n_1 > n_0$ máme

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(n_0) = \lim_{x\to\infty} F(x)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Předpokládejme nyní, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak je funkce

$$F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad t \in [n_0, \infty)$$

primitivní k f na (n_0, ∞), a tedy pro každé $n_1 > n_0$ máme

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(n_0) = \lim_{x\to\infty} F(x)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Předpokládejme nyní, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak je funkce

$$F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad t \in [n_0, \infty)$$

primitivní k f na (n_0, ∞), a tedy pro každé $n_1 > n_0$ máme

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(n_0) = \lim_{x\to\infty} F(x)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n_0+1}^{n} a_i$$

Předpokládejme nyní, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak je funkce

$$F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad t \in [n_0, \infty)$$

primitivní k f na (n_0, ∞), a tedy pro každé $n_1 > n_0$ máme

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(n_0) = \lim_{x\to\infty} F(x)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n_0+1}^{n} a_i$$

$$= \sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i.$$

Proto $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i$ konverguje,

Předpokládejme nyní, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak je funkce

$$F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad t \in [n_0, \infty)$$

primitivní k f na (n_0, ∞), a tedy pro každé $n_1 > n_0$ máme

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(n_0) = \lim_{x\to\infty} F(x)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n_0+1}^{n} a_i$$

$$= \sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i.$$

Proto $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i$ konverguje, a tedy i $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje.

Obráceně, jestliže $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje, pak máme

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$$

Obráceně, jestliže $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje, pak máme

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n_0}^{n-1} a_i$$

Obráceně, jestliže $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje, pak máme

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n_0}^{n-1} a_i \geq \lim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Obráceně, jestliže $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje, pak máme

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n_0}^{n-1} a_i \geq \lim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{x\to\infty} F(x).$$

Obráceně, jestliže $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje, pak máme

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n_0}^{n-1} a_i \geq \lim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{x\to\infty} F(x).$$

Protože je f nezáporná, je F neklesající.

Obráceně, jestliže $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje, pak máme

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n_0}^{n-1} a_i \geq \lim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{x\to\infty} F(x).$$

Protože je f nezáporná, je F neklesající. Tedy limita F v nekonečnu existuje a je vlastní.

Obráceně, jestliže $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje, pak máme

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n_0}^{n-1} a_i \geq \lim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{x\to\infty} F(x).$$

Protože je f nezáporná, je F neklesající. Tedy limita F v nekonečnu existuje a je vlastní. Tedy $\int_{n_0}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ konverguje.

Obráceně, jestliže $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje, pak máme

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n_0}^{n-1} a_i \geq \lim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{x\to\infty} F(x).$$

Protože je f nezáporná, je F neklesající. Tedy limita F v nekonečnu existuje a je vlastní. Tedy $\int_{n_0}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ konverguje. $\square$

Příklad

Ukažte, že řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ diverguje.

Řešení

Položme $f(x) = \frac{1}{x \log x}$, $x \in [2, \infty)$.

Řešení

Položme $f(x) = \frac{1}{x \log x}$, $x \in [2, \infty)$. Pak f je nezáporná spojitá a nerostoucí na $[2, \infty)$.

Řešení

Položme $f(x) = \frac{1}{x \log x}$, $x \in [2, \infty)$. Pak f je nezáporná spojitá a nerostoucí na $[2, \infty)$. Protože

$$\int_2^{\infty} f(x) \, \mathrm{d}x$$

Řešení

Položme $f(x) = \frac{1}{x \log x}$, $x \in [2, \infty)$. Pak f je nezáporná spojitá a nerostoucí na $[2, \infty)$. Protože

$$\int_2^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

Řešení

Položme $f(x) = \frac{1}{x \log x}$, $x \in [2, \infty)$. Pak f je nezáporná spojitá a nerostoucí na $[2, \infty)$. Protože

$$\int_2^\infty f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\log 2}^\infty \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t = [\log t]_{\log 2}^\infty$$

Řešení

Položme $f(x) = \frac{1}{x \log x}$, $x \in [2, \infty)$. Pak f je nezáporná spojitá a nerostoucí na $[2, \infty)$. Protože

$$\int_2^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\log 2}^\infty \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\log t]_{\log 2}^\infty = \infty,$$

řada

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \log n} = \sum_{n=2}^\infty f(n)$$

diverguje.

Věta 9.37 (tvar zbytku v integrálním tvaru)

Věta 9.37 (tvar zbytku v integrálním tvaru)

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $a, x \in \mathbf{R}$, $a < x$, a funkce f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n + 1)$-ní derivaci.

Věta 9.37 (tvar zbytku v integrálním tvaru)

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $a, x \in \mathbf{R}$, $a < x$, *a funkce* f *má v každém bodě intervalu* $[a, x]$ *vlastní* $(n+1)$*-ní derivaci. Pak*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x)$$

Věta 9.37 (tvar zbytku v integrálním tvaru)

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $a, x \in \mathbf{R}$, $a < x$, *a funkce* f *má v každém bodě intervalu* $[a, x]$ *vlastní* $(n+1)$*-ní derivaci. Pak*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \int_a^x \frac{1}{n!} f^{n+1}(t)(x-t)^n \, dt. \tag{1}$$

Důkaz Věty 9.37

Budeme postupovat matematickou indukcí podle $n \in \mathbf{N}$.

Důkaz Věty 9.37

Budeme postupovat matematickou indukcí podle $n \in \mathbf{N}$. Pro $n = 0$ máme

$$f(x) - T_0^{f,a}(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

Důkaz Věty 9.37

Budeme postupovat matematickou indukcí podle $n \in \mathbf{N}$.
Pro $n = 0$ máme

$$f(x) - T_0^{f,a}(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

tedy vztah pro $n = 0$ platí.

Předpokládejme nyní platnost tvrzení pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ a dokažme ho pro $n + 1$.

Předpokládejme nyní platnost tvrzení pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ a dokažme ho pro $n+1$. Mějme tedy $(n+2)$-krát diferencovatelnou funkci f na intervalu $[a, x]$.

Předpokládejme nyní platnost tvrzení pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ a dokažme ho pro $n + 1$. Mějme tedy $(n + 2)$-krát diferencovatelnou funkci f na intervalu $[a, x]$. Pak je funkce $f^{(n+1)}(t)(x - t)^n$ spojitá na $[a, x]$, Předpokládejme nyní platnost tvrzení pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ a dokažme ho pro $n+1$. Mějme tedy $(n+2)$-krát diferencovatelnou funkci f na intervalu $[a, x]$. Pak je funkce $f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$ spojitá na $[a, x]$, a proto můžeme pomocí per partes počítat

$$\int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}\right]_a^x$$

$$\int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}\right]_a^x$$

$$- \int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(n+1)(x-t)^n(-1)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}\right]_a^x$$

$$- \int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(n+1)(x-t)^n(-1)\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^n + \int_a^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&\int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}\right]_a^x \\
&- \int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(n+1)(x-t)^n(-1)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^n + \int_a^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^n + f(x) - T_n^{f,a}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}\right]_a^x \\
&- \int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(n+1)(x-t)^n(-1)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^n + \int_a^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^n + f(x) - T_n^{f,a}(x) \\
&= f(x) - T_{n+1}^{f,a}(x).
\end{aligned}
$$

$$\int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}\right]_a^x$$

$$- \int_a^x \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(n+1)(x-t)^n(-1)\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^n + \int_a^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)(x-a)^n + f(x) - T_n^{f,a}(x)$$

$$= f(x) - T_{n+1}^{f,a}(x).$$

$\square$