22. přednáška, 12. 5. 2020

Věta 9.31 (první věta o střední hodnotě)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$ *a nechť* $a < b$. *Nechť* f *je spojitá funkce na* $[a, b]$, g *je nezáporná na* $[a, b]$, $g \in \mathcal{N}(a, b)$ *a* $fg \in \mathcal{N}(a, b)$. *Potom existuje* $c \in [a, b]$ *takové, že*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Důkaz věty 9.31

Funkce f, jakožto funkce na $[a, b]$ spojitá, nabývá na něm svého minima m a maxima M.

Důkaz věty 9.31

Funkce f, jakožto funkce na $[a, b]$ spojitá, nabývá na něm svého minima m a maxima M. Pak pro $x \in [a, b]$ platí

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x). \tag{1}$$

Důkaz věty 9.31

Funkce f, jakožto funkce na $[a, b]$ spojitá, nabývá na něm svého minima m a maxima M. Pak pro $x \in [a, b]$ platí

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x). \tag{1}$$

Pokud $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, pak $g = 0$, neboť je nezáporná.

Důkaz věty 9.31

Funkce f, jakožto funkce na $[a, b]$ spojitá, nabývá na něm svého minima m a maxima M. Pak pro $x \in [a, b]$ platí

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x). \tag{1}$$

Pokud $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, pak $g = 0$, neboť je nezáporná. Za bod c můžeme zvolit libovolný bod z $[a, b]$.

Důkaz věty 9.31

Funkce f, jakožto funkce na $[a, b]$ spojitá, nabývá na něm svého minima m a maxima M. Pak pro $x \in [a, b]$ platí

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x). \tag{1}$$

Pokud $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, pak $g = 0$, neboť je nezáporná. Za bod c můžeme zvolit libovolný bod z $[a, b]$.
Předpokládejme tedy, že $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$.

Důkaz věty 9.31

Funkce f, jakožto funkce na $[a, b]$ spojitá, nabývá na něm svého minima m a maxima M. Pak pro $x \in [a, b]$ platí

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x). \tag{1}$$

Pokud $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, pak $g = 0$, neboť je nezáporná. Za bod c můžeme zvolit libovolný bod z $[a, b]$.

Předpokládejme tedy, že $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$. Potom ze (1) platí

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \le M.$$

Důkaz věty 9.31

Funkce f, jakožto funkce na $[a, b]$ spojitá, nabývá na něm svého minima m a maxima M. Pak pro $x \in [a, b]$ platí

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x). \tag{1}$$

Pokud $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, pak $g = 0$, neboť je nezáporná. Za bod c můžeme zvolit libovolný bod z $[a, b]$.

Předpokládejme tedy, že $\int_a^b g(x)\,dx > 0$. Potom ze (1) platí

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq M.$$

Protože $f([a, b]) = [m, M]$,

Důkaz věty 9.31

Funkce f, jakožto funkce na $[a, b]$ spojitá, nabývá na něm svého minima m a maxima M. Pak pro $x \in [a, b]$ platí

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x). \tag{1}$$

Pokud $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, pak $g = 0$, neboť je nezáporná. Za bod c můžeme zvolit libovolný bod z $[a, b]$.
Předpokládejme tedy, že $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$. Potom ze (1) platí

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \leq M.$$

Protože $f([a, b]) = [m, M]$, existuje $c \in [a, b]$ splňující

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Důkaz věty 9.31

Funkce f, jakožto funkce na $[a, b]$ spojitá, nabývá na něm svého minima m a maxima M. Pak pro $x \in [a, b]$ platí

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x). \tag{1}$$

Pokud $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, pak $g = 0$, neboť je nezáporná. Za bod c můžeme zvolit libovolný bod z $[a, b]$.

Předpokládejme tedy, že $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$. Potom ze (1) platí

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \leq M.$$

Protože $f([a, b]) = [m, M]$, existuje $c \in [a, b]$ splňující

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Věta 9.32 (druhá věta o střední hodnotě)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, f *je spojitá funkce na* $[a, b]$, g *je monotónní a spojitá na* $[a, b]$.

Věta 9.32 (druhá věta o střední hodnotě)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, f *je spojitá funkce na* $[a, b]$, g *je monotónní a spojitá na* $[a, b]$. *Potom existuje* $c \in [a, b]$ *takové, že*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\int_c^b f(x)\,dx. \quad (2)$$

Důkaz Věty 9.32

Předpokládejme opět, že g je nezáporná a nerostoucí.

Důkaz Věty 9.32

Předpokládejme opět, že g je nezáporná a nerostoucí. Nalezneme-li totiž bod c pro funkci $-g$ či $g + C$,

Důkaz Věty 9.32

Předpokládejme opět, že g je nezáporná a nerostoucí. Nalezneme-li totiž bod c pro funkci $-g$ či $g + C$, pak takové c vyhovuje i (2).

Důkaz Věty 9.32

Předpokládejme opět, že g je nezáporná a nerostoucí. Nalezneme-li totiž bod c pro funkci $-g$ či $g + C$, pak takové c vyhovuje i (2).
Definujme

$$\varphi(y) = g(a)\int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t + g(b)\int_y^b f(t)\,\mathrm{d}t, \quad y \in [a,b].$$

Důkaz Věty 9.32

Předpokládejme opět, že g je nezáporná a nerostoucí. Nalezneme-li totiž bod c pro funkci $-g$ či $g + C$, pak takové c vyhovuje i (2).
Definujme

$$\varphi(y) = g(a) \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t + g(b) \int_y^b f(t)\,\mathrm{d}t, \quad y \in [a, b].$$

Potom lze funkci φ vyjádřit jako

$$\varphi(y) = (g(a) - g(b)) \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t + g(b) \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t, \quad y \in [a, b].$$

Pak je funkce φ spojitá na $[a, b]$, Pak je funkce φ spojitá na $[a, b]$, a tedy existují body $y_1, y_2 \in [a, b]$ takové, že

$$\varphi(y_1) = \max_{y \in [a,b]} \varphi(y) \quad \text{a} \quad \varphi(y_2) = \min_{y \in [a,b]} \varphi(y).$$

Pak je funkce φ spojitá na $[a, b]$, a tedy existují body $y_1, y_2 \in [a, b]$ takové, že

$$\varphi(y_1) = \max_{y \in [a,b]} \varphi(y) \quad \text{a} \quad \varphi(y_2) = \min_{y \in [a,b]} \varphi(y).$$

Uvažujme spojitou nezápornou nerostoucí funkci

$$\psi(t) = g(t) - g(b), \quad t \in [a, b].$$

Lemma 9.30 pak dává

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t - g(b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t$$

Lemma 9.30 pak dává

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t - g(b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \psi(a) \sup_{t\in[a,b]} \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s$$

Lemma 9.30 pak dává

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t - g(b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \psi(a) \sup_{t\in[a,b]} \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s$$

$$= (g(a) - g(b)) \max_{t\in[a,b]} \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Dostáváme

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq (g(a)-g(b)) \max_{t\in[a,b]} \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s + g(b) \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dostáváme

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \le (g(a)-g(b)) \max_{t\in[a,b]} \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s + g(b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \max_{t\in[a,b]} \left((g(a)-g(b)) \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s + g(b)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right)$$

Dostáváme

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq (g(a) - g(b)) \max_{t\in[a,b]} \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s + g(b) \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \max_{t\in[a,b]} \left((g(a) - g(b)) \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s + g(b) \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right)$$

$$= \varphi(y_1).$$

Obdobně obdržíme z Lemmatu 9.30

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \geq \varphi(y_2).$$

Spojitá funkce φ tedy musí v nějakém bodě $c \in [a, b]$ nabývat hodnoty $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, a tedy

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(c) = g(a)\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + g(b)\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Obdobně obdržíme z Lemmatu 9.30

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \geq \varphi(y_2).$$

Spojitá funkce φ tedy musí v nějakém bodě $c \in [a, b]$ nabývat hodnoty $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, a tedy

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(c) = g(a)\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + g(b)\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

$\square$