21. přednáška, 4. 5. 2020

Věta 9.28 (srovnávací kritérium)

Nechť $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^{\star}$ *a* $a < b$.

Věta 9.28 (srovnávací kritérium)

Nechť $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^\star$ *a* $a < b$. *Nechť funkce* $f, g\colon [a, b) \to \mathbf{R}$ *splňují* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *pro každé* $x \in [a, b)$.

Věta 9.28 (srovnávací kritérium)

Nechť $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^\star$ *a* $a < b$. *Nechť funkce* $f, g \colon [a, b) \to \mathbf{R}$ *splňují* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *pro každé* $x \in [a, b)$. *Nechť dále je* f *spojitá na* $[a, b)$ *a platí* $g \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 9.28 (srovnávací kritérium)

Nechť $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^\star$ *a* $a < b$. *Nechť funkce* $f, g\colon [a, b) \to \mathbf{R}$ *splňují* $0 \le f(x) \le g(x)$ *pro každé* $x \in [a, b)$. *Nechť dále je* f *spojitá na* $[a, b)$ *a platí* $g \in \mathcal{N}(a, b)$. *Potom* $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f.

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$.

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$,

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající.

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$,

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b).

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající,

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné.

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva a platí

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva a platí

$$\lim_{x \to b_-} F(x) \leq \lim_{x \to b_-} G(x).$$

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva a platí

$$\lim_{x \to b_-} F(x) \leq \lim_{x \to b_-} G(x).$$

Protože $g \in \mathcal{N}(a, b)$, je poslední limita vlastní.

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva a platí

$$\lim_{x \to b_-} F(x) \leq \lim_{x \to b_-} G(x).$$

Protože $g \in \mathcal{N}(a, b)$, je poslední limita vlastní. Protože je F neklesající, je i $\lim_{x \to b_-} F(x)$ vlastní.

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva a platí

$$\lim_{x \to b_-} F(x) \leq \lim_{x \to b_-} G(x).$$

Protože $g \in \mathcal{N}(a, b)$, je poslední limita vlastní. Protože je F neklesající, je i $\lim_{x \to b_-} F(x)$ vlastní. Obě funkce mají vlastní limitu v c, jelikož jsou v tomto bodě spojité.

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva a platí

$$\lim_{x \to b_-} F(x) \leq \lim_{x \to b_-} G(x).$$

Protože $g \in \mathcal{N}(a, b)$, je poslední limita vlastní. Protože je F neklesající, je i $\lim_{x \to b_-} F(x)$ vlastní. Obě funkce mají vlastní limitu v c, jelikož jsou v tomto bodě spojité. Tedy $f \in \mathcal{N}(c, b)$.

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva a platí

$$\lim_{x \to b_-} F(x) \leq \lim_{x \to b_-} G(x).$$

Protože $g \in \mathcal{N}(a, b)$, je poslední limita vlastní. Protože je F neklesající, je i $\lim_{x \to b_-} F(x)$ vlastní. Obě funkce mají vlastní limitu v c, jelikož jsou v tomto bodě spojité. Tedy $f \in \mathcal{N}(c, b)$. Protože f je spojitá na $[a, c]$,

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva a platí

$$\lim_{x \to b_-} F(x) \leq \lim_{x \to b_-} G(x).$$

Protože $g \in \mathcal{N}(a, b)$, je poslední limita vlastní. Protože je F neklesající, je i $\lim_{x \to b_-} F(x)$ vlastní. Obě funkce mají vlastní limitu v c, jelikož jsou v tomto bodě spojité. Tedy $f \in \mathcal{N}(c, b)$. Protože f je spojitá na $[a, c]$, platí $f \in \mathcal{N}(a, c)$.

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva a platí

$$\lim_{x \to b_-} F(x) \leq \lim_{x \to b_-} G(x).$$

Protože $g \in \mathcal{N}(a, b)$, je poslední limita vlastní. Protože je F neklesající, je i $\lim_{x \to b_-} F(x)$ vlastní. Obě funkce mají vlastní limitu v c, jelikož jsou v tomto bodě spojité. Tedy $f \in \mathcal{N}(c, b)$. Protože f je spojitá na $[a, c]$, platí $f \in \mathcal{N}(a, c)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz Věty 9.28

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, $G(x) \geq F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva a platí

$$\lim_{x \to b_-} F(x) \leq \lim_{x \to b_-} G(x).$$

Protože $g \in \mathcal{N}(a, b)$, je poslední limita vlastní. Protože je F neklesající, je i $\lim_{x \to b_-} F(x)$ vlastní. Obě funkce mají vlastní limitu v c, jelikož jsou v tomto bodě spojité. Tedy $f \in \mathcal{N}(c, b)$. Protože f je spojitá na $[a, c]$, platí $f \in \mathcal{N}(a, c)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$. $\square$

Poznámka

Tvrzení Věty 9.28 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a, b]$.

Poznámka

Tvrzení Věty 9.28 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a, b]$. Přesněji, jestliže $a \in \mathbf{R}^{\star}$, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$, funkce $f, g\colon (a, b] \to \mathbf{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in (a, b]$, f je spojitá na $(a, b]$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$,

Poznámka

Tvrzení Věty 9.28 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a, b]$. Přesněji, jestliže $a \in \mathbf{R}^\star$, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$, funkce $f, g\colon (a, b] \to \mathbf{R}$ splňují $0 \le f(x) \le g(x)$ pro každé $x \in (a, b]$, f je spojitá na $(a, b]$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$, potom také $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Příklad

Dokažte, že $\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Řešení

Funkce $\frac{1}{x^4+1}$ je spojitá na intervalu $[0, 1]$,

Řešení

Funkce $\frac{1}{x^4+1}$ je spojitá na intervalu $[0, 1]$, a tedy konverguje $\int_0^1 \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení

Funkce $\frac{1}{x^4+1}$ je spojitá na intervalu $[0, 1]$, a tedy konverguje $\int_0^1 \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$. Dále platí $0 \leq \frac{1}{x^4+1} \leq \frac{1}{x^4}$ na $[1, \infty)$.

Řešení

Funkce $\frac{1}{x^4+1}$ je spojitá na intervalu $[0,1]$, a tedy konverguje $\int_0^1 \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$. Dále platí $0 \leq \frac{1}{x^4+1} \leq \frac{1}{x^4}$ na $[1,\infty)$. Protože $x^{-4} \in \mathcal{N}(1,\infty)$,

Řešení

Funkce $\frac{1}{x^4+1}$ je spojitá na intervalu $[0,1]$, a tedy konverguje $\int_0^1 \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$. Dále platí $0 \leq \frac{1}{x^4+1} \leq \frac{1}{x^4}$ na $[1,\infty)$. Protože $x^{-4} \in \mathcal{N}(1,\infty)$, je podle Věty 9.28 i $\frac{1}{x^4+1} \in \mathcal{N}(1,\infty)$.

Řešení

Funkce $\frac{1}{x^4+1}$ je spojitá na intervalu $[0,1]$, a tedy konverguje $\int_0^1 \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$. Dále platí $0 \leq \frac{1}{x^4+1} \leq \frac{1}{x^4}$ na $[1,\infty)$. Protože $x^{-4} \in \mathcal{N}(1,\infty)$, je podle Věty 9.28 i $\frac{1}{x^4+1} \in \mathcal{N}(1,\infty)$. Pak dostáváme $\frac{1}{x^4+1} \in \mathcal{N}(0,\infty)$.

Věta 9.29 (limitní srovnávací kritérium)

Nechť $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^{\star}$, $a < b$, f, g *jsou spojité nezáporné funkce na* $[a, b)$.

Věta 9.29 (limitní srovnávací kritérium)

Nechť $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, f, g *jsou spojité nezáporné funkce na* $[a, b)$. *Jestliže* $\lim_{x \to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$,

Věta 9.29 (limitní srovnávací kritérium)

Nechť $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^{\star}$, $a < b$, f, g *jsou spojité nezáporné funkce na* $[a, b)$. *Jestliže* $\lim_{x \to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$, *pak* $f \in \mathcal{N}(a, b)$ *právě tehdy, když* $g \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz Věty 9.29

Označme $c = \lim_{x \to b_-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a nechť $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz Věty 9.29

Označme $c = \lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a nechť $f \in \mathcal{N}(a, b)$.
Nalezneme $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$\forall x \in [x_0, b)\colon \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2} c.$$

Důkaz Věty 9.29

Označme $c = \lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a nechť $f \in \mathcal{N}(a,b)$. Nalezneme $x_0 \in (a,b)$ takové, že

$$\forall x \in [x_0, b) \colon \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2}c.$$

Platí tedy

$$\forall x \in [x_0, b) \colon 0 \leq g(x) \leq \frac{2}{c} f(x).$$

Důkaz Věty 9.29

Označme $c = \lim_{x \to b_-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a nechť $f \in \mathcal{N}(a, b)$. Nalezneme $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$\forall x \in [x_0, b) \colon \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2} c.$$

Platí tedy

$$\forall x \in [x_0, b) \colon 0 \leq g(x) \leq \frac{2}{c} f(x).$$

Jelikož $f \in \mathcal{N}(a, b)$, je též $\frac{2}{c} f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz Věty 9.29

Označme $c = \lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a nechť $f \in \mathcal{N}(a, b)$.
Nalezneme $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$\forall x \in [x_0, b) \colon \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2} c.$$

Platí tedy

$$\forall x \in [x_0, b) \colon 0 \leq g(x) \leq \frac{2}{c} f(x).$$

Jelikož $f \in \mathcal{N}(a, b)$, je též $\frac{2}{c} f \in \mathcal{N}(a, b)$. Proto
$f \in \mathcal{N}(x_0, b)$,

Důkaz Věty 9.29

Označme $c = \lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a nechť $f \in \mathcal{N}(a,b)$. Nalezneme $x_0 \in (a,b)$ takové, že

$$\forall x \in [x_0, b) \colon \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2}c.$$

Platí tedy

$$\forall x \in [x_0, b) \colon 0 \leq g(x) \leq \frac{2}{c} f(x).$$

Jelikož $f \in \mathcal{N}(a,b)$, je též $\frac{2}{c} f \in \mathcal{N}(a,b)$. Proto $f \in \mathcal{N}(x_0, b)$, a tedy Věta 9.28 dává $g \in \mathcal{N}(x_0, b)$.

Důkaz Věty 9.29

Označme $c = \lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a nechť $f \in \mathcal{N}(a, b)$.
Nalezneme $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$\forall x \in [x_0, b) \colon \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2} c.$$

Platí tedy

$$\forall x \in [x_0, b) \colon 0 \leq g(x) \leq \frac{2}{c} f(x).$$

Jelikož $f \in \mathcal{N}(a, b)$, je též $\frac{2}{c} f \in \mathcal{N}(a, b)$. Proto $f \in \mathcal{N}(x_0, b)$, a tedy Věta 9.28 dává $g \in \mathcal{N}(x_0, b)$. Protože g je spojitá na omezeném intervalu $[a, x_0]$,

Důkaz Věty 9.29

Označme $c = \lim_{x \to b_-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a nechť $f \in \mathcal{N}(a, b)$.
Nalezneme $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$\forall x \in [x_0, b) \colon \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2} c.$$

Platí tedy

$$\forall x \in [x_0, b) \colon 0 \leq g(x) \leq \frac{2}{c} f(x).$$

Jelikož $f \in \mathcal{N}(a, b)$, je též $\frac{2}{c} f \in \mathcal{N}(a, b)$. Proto $f \in \mathcal{N}(x_0, b)$, a tedy Věta 9.28 dává $g \in \mathcal{N}(x_0, b)$. Protože g je spojitá na omezeném intervalu $[a, x_0]$, je zde newtonovsky integrovatelná.

Důkaz Věty 9.29

Označme $c = \lim_{x \to b_-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a nechť $f \in \mathcal{N}(a, b)$. Nalezneme $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$\forall x \in [x_0, b) \colon \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2} c.$$

Platí tedy

$$\forall x \in [x_0, b) \colon 0 \leq g(x) \leq \frac{2}{c} f(x).$$

Jelikož $f \in \mathcal{N}(a, b)$, je též $\frac{2}{c} f \in \mathcal{N}(a, b)$. Proto $f \in \mathcal{N}(x_0, b)$, a tedy Věta 9.28 dává $g \in \mathcal{N}(x_0, b)$. Protože g je spojitá na omezeném intervalu $[a, x_0]$, je zde newtonovsky integrovatelná. Potom $g \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz Věty 9.29

Označme $c = \lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a nechť $f \in \mathcal{N}(a, b)$. Nalezneme $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$\forall x \in [x_0, b) \colon \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2} c.$$

Platí tedy

$$\forall x \in [x_0, b) \colon 0 \leq g(x) \leq \frac{2}{c} f(x).$$

Jelikož $f \in \mathcal{N}(a, b)$, je též $\frac{2}{c} f \in \mathcal{N}(a, b)$. Proto $f \in \mathcal{N}(x_0, b)$, a tedy Věta 9.28 dává $g \in \mathcal{N}(x_0, b)$. Protože g je spojitá na omezeném intervalu $[a, x_0]$, je zde newtonovsky integrovatelná. Potom $g \in \mathcal{N}(a, b)$.

Obrácenou implikaci lze dokázat obdobně za pomocí odhadu $\frac{f(x)}{g(x)} < 2c$ na vhodném intervalu (x_0, b).

Obrácenou implikaci lze dokázat obdobně za pomocí odhadu $\frac{f(x)}{g(x)} < 2c$ na vhodném intervalu (x_0, b). $\square$

Poznámka

Pokud $c = 0$, pak platí implikace
$g \in \mathcal{N}(a, b) \Rightarrow f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Poznámka

Pokud $c = 0$, pak platí implikace $g \in \mathcal{N}(a, b) \Rightarrow f \in \mathcal{N}(a, b)$. Pokud $c = \infty$, pak platí implikace $f \in \mathcal{N}(a, b) \Rightarrow g \in \mathcal{N}(a, b)$.

Příklad

Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Řešení

Položme pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x^3 + x^2},$$

Řešení

Položme pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x^3 + x^2}, \quad g(x) = x^{-\frac{5}{2}}.$$

Řešení

Položme pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x^3 + x^2}, \quad g(x) = x^{-\frac{5}{2}}.$$

Obě funkce jsou spojité nezáporné funkce na $[1, \infty)$ a platí

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Řešení

Položme pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x^3 + x^2}, \quad g(x) = x^{-\frac{5}{2}}.$$

Obě funkce jsou spojité nezáporné funkce na $[1, \infty)$ a platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}}{x^{\frac{-5}{2}}}$$

Řešení

Položme pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x^3 + x^2}, \quad g(x) = x^{-\frac{5}{2}}.$$

Obě funkce jsou spojité nezáporné funkce na $[1, \infty)$ a platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}}{x^{\frac{-5}{2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{x+1}$$

Řešení

Položme pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x^3 + x^2}, \quad g(x) = x^{-\frac{5}{2}}.$$

Obě funkce jsou spojité nezáporné funkce na $[1, \infty)$ a platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}}{x^{\frac{-5}{2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{x+1} = 2.$$

Řešení

Položme pro $x \in [1,\infty)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}, \quad g(x) = x^{-\frac{5}{2}}.$$

Obě funkce jsou spojité nezáporné funkce na $[1,\infty)$ a platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}}{x^{\frac{-5}{2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}{x+1} = 2.$$

Podle Věty 9.29 dostáváme $f \in \mathcal{N}(1,\infty)$, neboť již víme, že $g \in \mathcal{N}(1,\infty)$.

Lemma 9.30

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, f *je spojitá funkce na* $[a, b]$ *a* $g\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ *je nerostoucí, nezáporná a spojitá.*

Lemma 9.30

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, f je spojitá funkce na $[a, b]$ a $g\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ je nerostoucí, nezáporná a spojitá. Potom

$$g(a) \inf_{x\in[a,b]} \int_a^x f(t)\,dt \le \int_a^b f(t)g(t)\,dt \le g(a) \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x f(t)\,dt.$$

Lemma 9.30

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, f je spojitá funkce na $[a, b]$ a $g\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ je nerostoucí, nezáporná a spojitá. Potom

$$g(a) \inf_{x\in[a,b]} \int_a^x f(t)\,dt \le \int_a^b f(t)g(t)\,dt \le g(a) \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x f(t)\,dt.$$

Speciálně platí

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \le g(a) \sup_{x\in[a,b]} \left|\int_a^x f(t)\,dt\right|.$$

Důkaz Lemmatu 9.30

Dokažme nejprve druhou nerovnost.

Důkaz Lemmatu 9.30

Dokažme nejprve druhou nerovnost. Zvolme $\varepsilon > 0$.

Důkaz Lemmatu 9.30

Dokažme nejprve druhou nerovnost. Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky stejnoměrné spojitosti funkcí f a fg existuje $\delta > 0$ takové, že platí

Důkaz Lemmatu 9.30

Dokažme nejprve druhou nerovnost. Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky stejnoměrné spojitosti funkcí f a fg existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\forall x, y \in [a, b] \colon |x - y| < \delta \Rightarrow$$

$$(|f(x)g(x) - f(y)g(y)| < \varepsilon) \ \wedge \ (|f(x) - f(y)| < \varepsilon)\,.$$

Označme

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a, b],$$

Označme

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a, b],$$

a zvolme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ s normou menší než δ.

Označme

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b],$$

a zvolme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ s normou menší než δ. Pak máme pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\forall t \in [x_{i-1}, x_i]\colon f(t) \geq f(x_{i-1}) - \varepsilon,$$

Označme

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b],$$

a zvolme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ s normou menší než δ. Pak máme pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\forall t \in [x_{i-1}, x_i]\colon\ f(t) \geq f(x_{i-1}) - \varepsilon,$$

a tedy

$$f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Obdobnou úvahou dostáváme

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \le f(x_{i-1})g(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(x_i - x_{i-1})$$

Obdobnou úvahou dostáváme

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq f(x_{i-1})g(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(x_i - x_{i-1})$$

$$\leq g(x_{i-1})\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon(x_i - x_{i-1})\right) + \varepsilon(x_i - x_{i-1})$$

Obdobnou úvahou dostáváme

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \le f(x_{i-1})g(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(x_i - x_{i-1})$$

$$\le g(x_{i-1})\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon(x_i - x_{i-1})\right) + \varepsilon(x_i - x_{i-1})$$

$$\le g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + (g(a)+1)\varepsilon(x_i - x_{i-1}).$$

Obdobnou úvahou dostáváme

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq f(x_{i-1})g(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(x_i - x_{i-1})$$

$$\leq g(x_{i-1})\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon(x_i - x_{i-1})\right) + \varepsilon(x_i - x_{i-1})$$

$$\leq g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + (g(a)+1)\varepsilon(x_i - x_{i-1}).$$

Označme

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(g(a)+1)(b-a).$$

Pak

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Pak

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(x_i - x_{i-1})(g(a)+1)$$

Pak

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(x_i - x_{i-1})(g(a)+1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon(g(a)+1)(b-a)$$

Pak

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(x_i - x_{i-1})(g(a)+1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon(g(a)+1)(b-a)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})(F(x_i) - F(x_{i-1})) + \tilde{\varepsilon}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)(g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1})F(x_n) + \tilde{\varepsilon}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)(g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1})F(x_n) + \tilde{\varepsilon}$$

$$\leq \sup_{t\in[a,b]} F(t) \left(\sum_{i=1}^{n-1} (g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1}) \right) + \tilde{\varepsilon}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)(g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1})F(x_n) + \tilde{\varepsilon}$$

$$\leq \sup_{t\in[a,b]} F(t) \left(\sum_{i=1}^{n-1} (g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1}) \right) + \tilde{\varepsilon}$$

$$= g(a) \sup_{t\in[a,b]} F(t) + \varepsilon(g(a) + 1)(b - a).$$

Jelikož ε bylo libovolné, plyne odtud požadovaná nerovnost.

$$= \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)(g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1})F(x_n) + \tilde{\varepsilon}$$

$$\leq \sup_{t\in[a,b]} F(t) \left(\sum_{i=1}^{n-1} (g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1}) \right) + \tilde{\varepsilon}$$

$$= g(a) \sup_{t\in[a,b]} F(t) + \varepsilon(g(a) + 1)(b - a).$$

Jelikož ε bylo libovolné, plyne odtud požadovaná nerovnost.
První nerovnost lze dokázat obdobně.

$$= \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)(g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1})F(x_n) + \tilde{\varepsilon}$$

$$\leq \sup_{t\in[a,b]} F(t) \left(\sum_{i=1}^{n-1} (g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1}) \right) + \tilde{\varepsilon}$$

$$= g(a) \sup_{t\in[a,b]} F(t) + \varepsilon(g(a)+1)(b-a).$$

Jelikož ε bylo libovolné, plyne odtud požadovaná nerovnost.
První nerovnost lze dokázat obdobně.

$\square$