20. přednáška, 28. 4. 2020

Věta 9.19 (aditivita Newtonova integrálu)

Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}^\star$, $a < c < b$.

Věta 9.19 (aditivita Newtonova integrálu)

Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}^\star$, $a < c < b$.

(a) *Jestliže existuje Newtonův integrál funkce* f *na intervalu* (a, b), *potom existují integrály funkce* f *na intervalech* (a, c) *a* (c, b) *a platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Věta 9.19 (aditivita Newtonova integrálu)

Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}^\star$*,* $a < c < b$*.*

(a) *Jestliže existuje Newtonův integrál funkce* f *na intervalu* (a, b)*, potom existují integrály funkce* f *na intervalech* (a, c) *a* (c, b) *a platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

(b) *Jestliže existují Newtonovy integrály funkce* f *na intervalech* (a, c) *a* (c, b) *a* f *je spojitá v* c*, pak platí* (1)*, pokud má pravá strana smysl.*

Důkaz Věty 9.19

(a) Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a, b).

Důkaz Věty 9.19

(a) Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a, b). Pak je F primitivní k f i na intervalech (a, c) a (c, b).

Důkaz Věty 9.19

(a) Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a, b). Pak je F primitivní k f i na intervalech (a, c) a (c, b). Navíc má funkce F v bodě c, jakožto spojitá funkce na (a, b), vlastní jednostranné limity.

Důkaz Věty 9.19

(a) Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a, b). Pak je F primitivní k f i na intervalech (a, c) a (c, b). Navíc má funkce F v bodě c, jakožto spojitá funkce na (a, b), vlastní jednostranné limity. Tedy platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Důkaz Věty 9.19

(a) Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a, b). Pak je F primitivní k f i na intervalech (a, c) a (c, b). Navíc má funkce F v bodě c, jakožto spojitá funkce na (a, b), vlastní jednostranné limity. Tedy platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F]_a^b$$

Důkaz Věty 9.19

(a) Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a, b). Pak je F primitivní k f i na intervalech (a, c) a (c, b). Navíc má funkce F v bodě c, jakožto spojitá funkce na (a, b), vlastní jednostranné limity. Tedy platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F]_a^b = [F]_a^c + [F]_c^b$$

Důkaz Věty 9.19

(a) Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a,b). Pak je F primitivní k f i na intervalech (a,c) a (c,b). Navíc má funkce F v bodě c, jakožto spojitá funkce na (a,b), vlastní jednostranné limity. Tedy platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F]_a^b = [F]_a^c + [F]_c^b = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

(b) Nechť F je primitivní k f na (a, c) a G je primitivní k f na (c, b).

(b) Nechť F je primitivní k f na (a, c) a G je primitivní k f na (c, b). Funkce f je spojitá v bodě c, a proto je omezená na jistém okolí bodu c.

(b) Nechť F je primitivní k f na (a, c) a G je primitivní k f na (c, b). Funkce f je spojitá v bodě c, a proto je omezená na jistém okolí bodu c. Nalezneme tedy $\delta > 0$ a $K > 0$ takové, že $a < c - \delta$ a $|f(x)| \leq K$ pro každé $x \in (c - \delta, c)$.

(b) Nechť F je primitivní k f na (a, c) a G je primitivní k f na (c, b). Funkce f je spojitá v bodě c, a proto je omezená na jistém okolí bodu c. Nalezneme tedy $\delta > 0$ a $K > 0$ takové, že $a < c - \delta$ a $|f(x)| \leq K$ pro každé $x \in (c - \delta, c)$. Potom podle Věty 9.18 pro každé $x \in (c - \delta, c)$ platí

$$-K(x - c + \delta) = \int_{c-\delta}^{x} (-K)\,\mathrm{d}t \leq \int_{c-\delta}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

(b) Nechť F je primitivní k f na (a, c) a G je primitivní k f na (c, b). Funkce f je spojitá v bodě c, a proto je omezená na jistém okolí bodu c. Nalezneme tedy $\delta > 0$ a $K > 0$ takové, že $a < c - \delta$ a $|f(x)| \leq K$ pro každé $x \in (c - \delta, c)$. Potom podle Věty 9.18 pro každé $x \in (c - \delta, c)$ platí

$$-K(x - c + \delta) = \int_{c-\delta}^{x} (-K)\,\mathrm{d}t \leq \int_{c-\delta}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \int_{c-\delta}^{x} K\,\mathrm{d}t$$

(b) Nechť F je primitivní k f na (a, c) a G je primitivní k f na (c, b). Funkce f je spojitá v bodě c, a proto je omezená na jistém okolí bodu c. Nalezneme tedy $\delta > 0$ a $K > 0$ takové, že $a < c - \delta$ a $|f(x)| \leq K$ pro každé $x \in (c - \delta, c)$. Potom podle Věty 9.18 pro každé $x \in (c - \delta, c)$ platí

$$-K(x - c + \delta) = \int_{c-\delta}^{x} (-K)\,\mathrm{d}t \leq \int_{c-\delta}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \int_{c-\delta}^{x} K\,\mathrm{d}t = K(x - c + \delta).$$

(b) Nechť F je primitivní k f na (a, c) a G je primitivní k f na (c, b). Funkce f je spojitá v bodě c, a proto je omezená na jistém okolí bodu c. Nalezneme tedy $\delta > 0$ a $K > 0$ takové, že $a < c - \delta$ a $|f(x)| \leq K$ pro každé $x \in (c - \delta, c)$. Potom podle Věty 9.18 pro každé $x \in (c - \delta, c)$ platí

$$-K(x - c + \delta) = \int_{c-\delta}^{x} (-K)\,\mathrm{d}t \leq \int_{c-\delta}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \int_{c-\delta}^{x} K\,\mathrm{d}t = K(x - c + \delta).$$

Dále platí $\int_{c-\delta}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(c - \delta)$ pro každé $x \in (c - \delta, c)$, neboť F je spojitá na (a, c).

Limita $\lim_{x \to c-} F(x)$ existuje podle předpokladu věty a z výše uvedeného plyne, že tato limita je vlastní.

Limita $\lim_{x \to c-} F(x)$ existuje podle předpokladu věty a z výše uvedeného plyne, že tato limita je vlastní. Obdobně platí, že $\lim_{x \to c+} G(x)$ je vlastní.

Limita $\lim_{x\to c-} F(x)$ existuje podle předpokladu věty a z výše uvedeného plyne, že tato limita je vlastní. Obdobně platí, že $\lim_{x\to c+} G(x)$ je vlastní. Přičtením vhodné konstanty k funkci G můžeme zařídit, aby

$$\lim_{x\to c_-} F(x) = \lim_{x\to c_+} G(x).$$

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, c), \\ & \end{cases}$$

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, c), \\ \lim_{x \to c_-} F(x), & x = c, \\ \end{cases}$$

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, c), \\ \lim_{x \to c_-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c, b). \end{cases}$$

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, c), \\ \lim_{x \to c_-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c, b). \end{cases}$$

Pak je H spojitá na (a, b) a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a, c) \cup (c, b)$.

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, c), \\ \lim_{x \to c_-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c, b). \end{cases}$$

Pak je H spojitá na (a, b) a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a, c) \cup (c, b)$. V bodě c toto platí

$$H'(c) =$$

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a,c), \\ \lim_{x\to c_-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c,b). \end{cases}$$

Pak je H spojitá na (a,b) a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a,c) \cup (c,b)$. V bodě c toto platí

$$H'(c) = \lim_{x\to c} H'(x)$$

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, c), \\ \lim_{x \to c_-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c, b). \end{cases}$$

Pak je H spojitá na (a, b) a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a, c) \cup (c, b)$. V bodě c toto platí

$$H'(c) = \lim_{x \to c} H'(x) = \lim_{x \to c} f(x)$$

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, c), \\ \lim_{x \to c_-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c, b). \end{cases}$$

Pak je H spojitá na (a, b) a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a, c) \cup (c, b)$. V bodě c toto platí

$$H'(c) = \lim_{x \to c} H'(x) = \lim_{x \to c} f(x) = f(c),$$

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, c), \\ \lim_{x \to c_-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c, b). \end{cases}$$

Pak je H spojitá na (a, b) a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a, c) \cup (c, b)$. V bodě c toto platí

$$H'(c) = \lim_{x \to c} H'(x) = \lim_{x \to c} f(x) = f(c),$$

neboť f je spojitá v c.

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, c), \\ \lim_{x \to c_-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c, b). \end{cases}$$

Pak je H spojitá na (a, b) a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a, c) \cup (c, b)$. V bodě c toto platí

$$H'(c) = \lim_{x \to c} H'(x) = \lim_{x \to c} f(x) = f(c),$$

neboť f je spojitá v c. Funkce H je tedy primitivní k f na (a, b). Podle předpokladu je definován výraz $[H]_a^c + [H]_c^b$.

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a,c), \\ \lim_{x\to c-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c,b). \end{cases}$$

Pak je H spojitá na (a,b) a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a,c) \cup (c,b)$. V bodě c toto platí

$$H'(c) = \lim_{x\to c} H'(x) = \lim_{x\to c} f(x) = f(c),$$

neboť f je spojitá v c. Funkce H je tedy primitivní k f na (a,b). Podle předpokladu je definován výraz $[H]_a^c + [H]_c^b$. Odtud plyne, že výraz $\lim_{x\to b-} H(x) - \lim_{x\to a+} H(x)$ je definován.

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, c), \\ \lim_{x \to c_-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c, b). \end{cases}$$

Pak je H spojitá na (a, b) a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a, c) \cup (c, b)$. V bodě c toto platí

$$H'(c) = \lim_{x \to c} H'(x) = \lim_{x \to c} f(x) = f(c),$$

neboť f je spojitá v c. Funkce H je tedy primitivní k f na (a, b). Podle předpokladu je definován výraz $[H]_a^c + [H]_c^b$. Odtud plyne, že výraz $\lim_{x \to b-} H(x) - \lim_{x \to a+} H(x)$ je definován. $\square$

Věta 9.20

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$*,* $a < b$*, a* f *má Newtonův integrál na intervalu* (a, b) *a* f *je spojitá na* (a, b)*.*

Věta 9.20

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, *a* f *má Newtonův integrál na intervalu* (a, b) *a* f *je spojitá na* (a, b). *Pak* $\int_a^b |f(x)|\,dx$ *existuje a*

Věta 9.20

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, *a* f *má Newtonův integrál na intervalu* (a, b) *a* f *je spojitá na* (a, b). *Pak* $\int_a^b |f(x)|\, dx$ *existuje a*

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Důkaz Věty 9.20

Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní.

Důkaz Věty 9.20

Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní. Označme ji F.

Důkaz Věty 9.20

Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní. Označme ji F. Protože $|f| \geq 0$, je F neklesající.

Důkaz Věty 9.20

Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní. Označme ji F. Protože $|f| \geq 0$, je F neklesající. Tedy existují limity v krajních bodech intervalu (a, b), přičemž $\lim_{x \to b_-} F(x) > -\infty$

Důkaz Věty 9.20

Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní. Označme ji F. Protože $|f| \geq 0$, je F neklesající. Tedy existují limity v krajních bodech intervalu (a, b), přičemž $\lim_{x\to b_-} F(x) > -\infty$ a $\lim_{x\to a_+} F(x) < \infty$.

Důkaz Věty 9.20

Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní. Označme ji F. Protože $|f| \geq 0$, je F neklesající. Tedy existují limity v krajních bodech intervalu (a, b), přičemž $\lim_{x \to b_-} F(x) > -\infty$ a $\lim_{x \to a_+} F(x) < \infty$. Potom je rozdíl $\lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x)$ definován.

Důkaz Věty 9.20

Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní. Označme ji F. Protože $|f| \geq 0$, je F neklesající. Tedy existují limity v krajních bodech intervalu (a, b), přičemž $\lim_{x \to b_-} F(x) > -\infty$ a $\lim_{x \to a_+} F(x) < \infty$. Potom je rozdíl $\lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x)$ definován. Funkce $|f|$ má tedy Newtonův integrál na intervalu (a, b).

Důkaz Věty 9.20

Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní. Označme ji F. Protože $|f| \geq 0$, je F neklesající. Tedy existují limity v krajních bodech intervalu (a, b), přičemž $\lim_{x \to b_-} F(x) > -\infty$ a $\lim_{x \to a_+} F(x) < \infty$. Potom je rozdíl $\lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x)$ definován. Funkce $|f|$ má tedy Newtonův integrál na intervalu (a, b). Jelikož platí $-f \leq |f|$ i $f \leq |f|$, dostáváme podle Věty 9.18

Důkaz Věty 9.20

Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní. Označme ji F. Protože $|f| \geq 0$, je F neklesající. Tedy existují limity v krajních bodech intervalu (a, b), přičemž $\lim_{x\to b_-} F(x) > -\infty$ a $\lim_{x\to a_+} F(x) < \infty$. Potom je rozdíl $\lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x)$ definován. Funkce $|f|$ má tedy Newtonův integrál na intervalu (a, b). Jelikož platí $-f \leq |f|$ i $f \leq |f|$, dostáváme podle Věty 9.18

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \max\left\{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right\}$$

Důkaz Věty 9.20

Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní. Označme ji F. Protože $|f| \geq 0$, je F neklesající. Tedy existují limity v krajních bodech intervalu (a, b), přičemž $\lim_{x \to b_-} F(x) > -\infty$ a $\lim_{x \to a_+} F(x) < \infty$. Potom je rozdíl $\lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x)$ definován. Funkce $|f|$ má tedy Newtonův integrál na intervalu (a, b). Jelikož platí $-f \leq |f|$ i $f \leq |f|$, dostáváme podle Věty 9.18

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| = \max\left\{ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right\}$$

$$= \max\left\{ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x \right\} \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz Věty 9.20

Funkce $|f|$ má jakožto spojitá funkce na intervalu funkci primitivní. Označme ji F. Protože $|f| \geq 0$, je F neklesající. Tedy existují limity v krajních bodech intervalu (a, b), přičemž $\lim_{x \to b_-} F(x) > -\infty$ a $\lim_{x \to a_+} F(x) < \infty$. Potom je rozdíl $\lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x)$ definován. Funkce $|f|$ má tedy Newtonův integrál na intervalu (a, b). Jelikož platí $-f \leq |f|$ i $f \leq |f|$, dostáváme podle Věty 9.18

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| = \max\left\{ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right\}$$

$$= \max\left\{ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x \right\} \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

Poznámka

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, F a G jsou funkce definované na (a, b)

Poznámka

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^{\star}$, $a < b$, F a G jsou funkce definované na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $F(a+)$, $F(b-)$, $G(a+)$ a $G(b-)$.

Poznámka

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, F a G jsou funkce definované na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $F(a+)$, $F(b-)$, $G(a+)$ a $G(b-)$. Potom platí

$$[F - G]_a^b = [F]_a^b - [G]_a^b,$$

Poznámka

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^{\star}$, $a < b$, F a G jsou funkce definované na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $F(a+)$, $F(b-)$, $G(a+)$ a $G(b-)$. Potom platí

$$[F - G]_a^b = [F]_a^b - [G]_a^b,$$

jestliže má pravá strana smysl.

Věta 9.21 (per partes pro Newtonův integrál)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^{\star}$, $a < b$, f *a* g *jsou funkce definované na* (a, b).

Věta 9.21 (per partes pro Newtonův integrál)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, f *a* g *jsou funkce definované na* (a, b). *Nechť* F *je primitivní funkce k funkci* f *na* (a, b) *a* G *je primitivní funkce k funkci* g *na* (a, b).

Věta 9.21 (per partes pro Newtonův integrál)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, *f a g jsou funkce definované na* (a, b). *Nechť F je primitivní funkce k funkci f na* (a, b) *a G je primitivní funkce k funkci g na* (a, b). *Potom platí*

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = [FG]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)\,dx,$$

Věta 9.21 (per partes pro Newtonův integrál)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, *f a g jsou funkce definované na* (a, b). *Nechť F je primitivní funkce k funkci f na* (a, b) *a G je primitivní funkce k funkci g na* (a, b). *Potom platí*

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = [FG]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)\,dx,$$

jestliže má pravá strana smysl.

Důkaz Věty 9.21

Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a, b).

Důkaz Věty 9.21

Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a, b). Označme ji písmenem H.

Důkaz Věty 9.21

Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a, b). Označme ji písmenem H. Potom platí

$$(GF - H)'$$

Důkaz Věty 9.21

Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a, b). Označme ji písmenem H. Potom platí

$$(GF - H)' = gF + Gf - fG$$

Důkaz Věty 9.21

Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a, b). Označme ji písmenem H. Potom platí

$$(GF - H)' = gF + Gf - fG = gF,$$

Důkaz Věty 9.21

Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a, b). Označme ji písmenem H. Potom platí

$$(GF - H)' = gF + Gf - fG = gF,$$

tj. $GF - H$ je primitivní funkcí k funkci gF. Rozdíl výrazů $[GF]_a^b$, $\int_a^b G(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ je definován, stejně jako výrazy samotné.

Důkaz Věty 9.21

Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a, b). Označme ji písmenem H. Potom platí

$$(GF - H)' = gF + Gf - fG = gF,$$

tj. $GF - H$ je primitivní funkcí k funkci gF. Rozdíl výrazů $[GF]_a^b$, $\int_a^b G(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ je definován, stejně jako výrazy samotné. Pak plyne, že

$$\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Důkaz Věty 9.21

Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a, b). Označme ji písmenem H. Potom platí

$$(GF - H)' = gF + Gf - fG = gF,$$

tj. $GF - H$ je primitivní funkcí k funkci gF. Rozdíl výrazů $[GF]_a^b$, $\int_a^b G(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ je definován, stejně jako výrazy samotné. Pak plyne, že

$$\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [FG - H]_a^b$$

Důkaz Věty 9.21

Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a, b). Označme ji písmenem H. Potom platí

$$(GF - H)' = gF + Gf - fG = gF,$$

tj. $GF - H$ je primitivní funkcí k funkci gF. Rozdíl výrazů $[GF]_a^b$, $\int_a^b G(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ je definován, stejně jako výrazy samotné. Pak plyne, že

$$\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [FG - H]_a^b = [FG]_a^b - [H]_a^b$$

Důkaz Věty 9.21

Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a, b). Označme ji písmenem H. Potom platí

$$(GF - H)' = gF + Gf - fG = gF,$$

tj. $GF - H$ je primitivní funkcí k funkci gF. Rozdíl výrazů $[GF]_a^b$, $\int_a^b G(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ je definován, stejně jako výrazy samotné. Pak plyne, že

$$\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [FG - H]_a^b = [FG]_a^b - [H]_a^b$$

$$= [FG]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz Věty 9.21

Jelikož je pravá strana požadované rovnosti dobře definována, existuje primitivní funkce k funkci fG na (a, b). Označme ji písmenem H. Potom platí

$$(GF - H)' = gF + Gf - fG = gF,$$

tj. $GF - H$ je primitivní funkcí k funkci gF. Rozdíl výrazů $[GF]_a^b$, $\int_a^b G(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ je definován, stejně jako výrazy samotné. Pak plyne, že

$$\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [FG - H]_a^b = [FG]_a^b - [H]_a^b$$

$$= [FG]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 9.22 (substituce pro Newtonův integrál)

Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, $\alpha < \beta$,

Věta 9.22 (substituce pro Newtonův integrál)

Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, $\alpha < \beta$, *f je funkce definovaná na* (a, b) *a* φ *je funkce definovaná na* (α, β).

Věta 9.22 (substituce pro Newtonův integrál)

Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, $\alpha < \beta$, f *je funkce definovaná na* (a, b) *a* φ *je funkce definovaná na* (α, β). *Nechť* φ *má vlastní nenulovou derivaci na* (α, β) *a platí* $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. *Potom*

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

Věta 9.22 (substituce pro Newtonův integrál)

Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, $\alpha < \beta$, f je funkce definovaná na (a, b) a φ je funkce definovaná na (α, β). Nechť φ má vlastní nenulovou derivaci na (α, β) a platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Potom

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\, dt,$$

Věta 9.22 (substituce pro Newtonův integrál)

Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, $\alpha < \beta$, f *je funkce definovaná na* (a, b) *a* φ *je funkce definovaná na* (α, β). *Nechť* φ *má vlastní nenulovou derivaci na* (α, β) *a platí* $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. *Potom*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,dt,$$

jestliže má alespoň jedna strana smysl.

Důkaz Věty 9.22

Funkce φ má na intervalu (α, β) vlastní derivaci.

Důkaz Věty 9.22

Funkce φ má na intervalu (α, β) vlastní derivaci. Z Darbouxovy vlastnosti derivace, že funkce φ' nemění na (α, β) znaménko.

Důkaz Věty 9.22

Funkce φ má na intervalu (α, β) vlastní derivaci. Z Darbouxovy vlastnosti derivace, že funkce φ' nemění na (α, β) znaménko. Předpokládejme, že φ' je záporná na (α, β).

Předpokládejme, že existuje $\int_a^b f(x)\,dx$.

Předpokládejme, že existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Potom má f na (a,b) primitivní funkci F a existují limity $F(b-)$ a $F(a+)$.

Předpokládejme, že existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Potom má f na (a,b) primitivní funkci F a existují limity $F(b-)$ a $F(a+)$. Z věty o derivaci složené funkce plyne, že také funkce $(f\circ\varphi)(-\varphi')$ má na intervalu (α,β) primitivní funkci, a to funkci $-F\circ\varphi$.

Předpokládejme, že existuje $\int_a^b f(x)\,dx$. Potom má f na (a, b) primitivní funkci F a existují limity $F(b-)$ a $F(a+)$. Z věty o derivaci složené funkce plyne, že také funkce $(f \circ \varphi)(-\varphi')$ má na intervalu (α, β) primitivní funkci, a to funkci $-F \circ \varphi$. Máme

$$\lim_{t\to\beta_-} \varphi(t) = a, \quad \lim_{t\to\alpha_+} \varphi(t) = b$$

Předpokládejme, že existuje $\int_a^b f(x)\,dx$. Potom má f na (a, b) primitivní funkci F a existují limity $F(b-)$ a $F(a+)$. Z věty o derivaci složené funkce plyne, že také funkce $(f \circ \varphi)(-\varphi')$ má na intervalu (α, β) primitivní funkci, a to funkci $-F \circ \varphi$. Máme

$$\lim_{t \to \beta_-} \varphi(t) = a, \quad \lim_{t \to \alpha_+} \varphi(t) = b$$

a

$$\lim_{t \to \alpha_+} F(\varphi(t)) = \lim_{x \to b_-} F(x), \quad \lim_{t \to \beta_-} F(\varphi(t)) = \lim_{x \to a_+} F(x).$$

Odtud dostáváme

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Odtud dostáváme

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))(-\varphi'(t))\,\mathrm{d}t$$

Odtud dostáváme

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))(-\varphi'(t))\,\mathrm{d}t = [-F\circ\varphi]_\alpha^\beta$$

Odtud dostáváme

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))(-\varphi'(t))\,\mathrm{d}t = [-F\circ\varphi]_\alpha^\beta$$

$$= -\lim_{x\to a_+} F(x) + \lim_{x\to b_-} F(x)$$

Odtud dostáváme

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))(-\varphi'(t))\,\mathrm{d}t = [-F\circ\varphi]_\alpha^\beta$$

$$= -\lim_{x\to a_+} F(x) + \lim_{x\to b_-} F(x) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nyní předpokládejme, že existuje integrál
$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$.

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Označme G primitivní funkci k $(f \circ \varphi)|\varphi'| = -(f \circ \varphi)\varphi'$.

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Označme G primitivní funkci k $(f \circ \varphi)|\varphi'| = -(f \circ \varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci pak plyne, že $-G \circ \varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f.

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Označme G primitivní funkci k $(f\circ\varphi)|\varphi'| = -(f\circ\varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci pak plyne, že $-G\circ\varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f. Platí

$$\lim_{x\to a_+}\varphi^{-1}(x)$$

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Označme G primitivní funkci k $(f \circ \varphi)|\varphi'| = -(f \circ \varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci pak plyne, že $-G \circ \varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f. Platí

$$\lim_{x\to a_+} \varphi^{-1}(x) = \beta, \quad \lim_{x\to b_-} \varphi^{-1}(x)$$

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Označme G primitivní funkci k $(f \circ \varphi)|\varphi'| = -(f \circ \varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci pak plyne, že $-G \circ \varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f. Platí

$$\lim_{x \to a_+} \varphi^{-1}(x) = \beta, \quad \lim_{x \to b_-} \varphi^{-1}(x) = \alpha,$$

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Označme G primitivní funkci k $(f\circ\varphi)|\varphi'| = -(f\circ\varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci pak plyne, že $-G\circ\varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f. Platí

$$\lim_{x\to a_+}\varphi^{-1}(x)=\beta,\qquad \lim_{x\to b_-}\varphi^{-1}(x)=\alpha,$$

a tedy

$$\lim_{x\to a_+} G(\varphi^{-1}(x))$$

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Označme G primitivní funkci k $(f\circ\varphi)|\varphi'| = -(f\circ\varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci pak plyne, že $-G\circ\varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f. Platí

$$\lim_{x\to a_+}\varphi^{-1}(x)=\beta,\qquad \lim_{x\to b_-}\varphi^{-1}(x)=\alpha,$$

a tedy

$$\lim_{x\to a_+} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t\to\beta_-} G(t),$$

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Označme G primitivní funkci k $(f\circ\varphi)|\varphi'| = -(f\circ\varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci pak plyne, že $-G\circ\varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f. Platí

$$\lim_{x\to a_+}\varphi^{-1}(x)=\beta,\qquad \lim_{x\to b_-}\varphi^{-1}(x)=\alpha,$$

a tedy

$$\lim_{x\to a_+} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t\to\beta_-} G(t),\qquad \lim_{x\to b_-} G(\varphi^{-1}(x))$$

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Označme G primitivní funkci k $(f \circ \varphi)|\varphi'| = -(f \circ \varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci pak plyne, že $-G \circ \varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f. Platí

$$\lim_{x \to a_+} \varphi^{-1}(x) = \beta, \quad \lim_{x \to b_-} \varphi^{-1}(x) = \alpha,$$

a tedy

$$\lim_{x \to a_+} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t \to \beta_-} G(t), \quad \lim_{x \to b_-} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t \to \alpha_+} G(t).$$

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Označme G primitivní funkci k $(f\circ\varphi)|\varphi'| = -(f\circ\varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci pak plyne, že $-G\circ\varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f. Platí

$$\lim_{x\to a_+}\varphi^{-1}(x)=\beta,\qquad \lim_{x\to b_-}\varphi^{-1}(x)=\alpha,$$

a tedy

$$\lim_{x\to a_+} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t\to\beta_-} G(t),\qquad \lim_{x\to b_-} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t\to\alpha_+} G(t).$$

Odtud máme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Označme G primitivní funkci k $(f\circ\varphi)|\varphi'| = -(f\circ\varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci pak plyne, že $-G\circ\varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f. Platí

$$\lim_{x\to a_+}\varphi^{-1}(x)=\beta,\qquad \lim_{x\to b_-}\varphi^{-1}(x)=\alpha,$$

a tedy

$$\lim_{x\to a_+} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t\to\beta_-} G(t),\qquad \lim_{x\to b_-} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t\to\alpha_+} G(t).$$

Odtud máme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [-G\circ\varphi]_a^b$$

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Označme G primitivní funkci k $(f \circ \varphi)|\varphi'| = -(f \circ \varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci pak plyne, že $-G \circ \varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f. Platí

$$\lim_{x \to a_+} \varphi^{-1}(x) = \beta, \quad \lim_{x \to b_-} \varphi^{-1}(x) = \alpha,$$

a tedy

$$\lim_{x \to a_+} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t \to \beta_-} G(t), \quad \lim_{x \to b_-} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t \to \alpha_+} G(t).$$

Odtud máme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [-G \circ \varphi]_a^b = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Nyní předpokládejme, že existuje integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Označme G primitivní funkci k $(f\circ\varphi)|\varphi'| = -(f\circ\varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci pak plyne, že $-G\circ\varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f. Platí

$$\lim_{x\to a_+}\varphi^{-1}(x)=\beta,\quad \lim_{x\to b_-}\varphi^{-1}(x)=\alpha,$$

a tedy

$$\lim_{x\to a_+} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t\to\beta_-} G(t),\qquad \lim_{x\to b_-} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t\to\alpha_+} G(t).$$

Odtud máme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [-G\circ\varphi]_a^b = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

$\square$

Věta 9.23 (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro funkce)

Nechť $a \in \mathbf{R}^\star$, $\delta_0 > 0$, *a funkce* F *je definována alespoň na* $P(a, \delta_0)$.

Věta 9.23 (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro funkce)

Nechť $a \in \mathbf{R}^\star$*,* $\delta_0 > 0$*, a funkce* F *je definována alespoň na* $P(a, \delta_0)$*. Potom existuje vlastní* $\lim_{x \to a} F(x)$ *právě tehdy, když je splněna následující (tzv. Bolzanova–Cauchyova) podmínka:*

Věta 9.23 (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro funkce)

Nechť $a \in \mathbf{R}^\star$, $\delta_0 > 0$, *a funkce* F *je definována alespoň na* $P(a, \delta_0)$. *Potom existuje vlastní* $\lim_{x\to a} F(x)$ *právě tehdy, když je splněna následující (tzv. Bolzanova–Cauchyova) podmínka:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in P(a, \delta)\colon |F(x) - F(y)| < \varepsilon.$$

Důkaz Věty 9.23

$\Rightarrow$

Důkaz Věty 9.23

$\Rightarrow$ Předpokládejme nejprve, že $\lim_{x \to a} F(x) = A$ a $A \in \mathbf{R}$.

Důkaz Věty 9.23

$\Rightarrow$ Předpokládejme nejprve, že $\lim_{x\to a} F(x) = A$ a $A \in \mathbf{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno.

Důkaz Věty 9.23

$\Rightarrow$ Předpokládejme nejprve, že $\lim_{x\to a} F(x) = A$ a $A \in \mathbf{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. K němu nalezneme $\delta \in \mathbf{R}$ kladné, že

$$\forall x \in P(a,\delta)\colon |F(x) - A| < \varepsilon.$$

Důkaz Věty 9.23

$\Rightarrow$ Předpokládejme nejprve, že $\lim_{x\to a} F(x) = A$ a $A \in \mathbf{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. K němu nalezneme $\delta \in \mathbf{R}$ kladné, že

$$\forall x \in P(a,\delta)\colon |F(x) - A| < \varepsilon.$$

Pak pro každou dvojici $x, y \in P(a,\delta)$ máme

$$|F(x) - F(y)| \leq |F(x) - A| + |A - F(y)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

$\Leftarrow$

$\Leftarrow$ Nechť platí podmínka věty.

$\Leftarrow$ Nechť platí podmínka věty. Nechť je funkce F definovaná na prstencovém okolí $P(a, \delta_0)$.

$\Leftarrow$ Nechť platí podmínka věty. Nechť je funkce F definovaná na prstencovém okolí $P(a, \delta_0)$. Je-li $\{x_n\}$ posloupnost obsažená v $P(a, \delta_0)$ taková, že $\lim x_n = a$, splňuje posloupnost $\{F(x_n)\}$ Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.

$\Leftarrow$ Nechť platí podmínka věty. Nechť je funkce F definovaná na prstencovém okolí $P(a, \delta_0)$. Je-li $\{x_n\}$ posloupnost obsažená v $P(a, \delta_0)$ taková, že $\lim x_n = a$, splňuje posloupnost $\{F(x_n)\}$ Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Zvolíme-li totiž $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, nechť kladné $\delta \in \mathbf{R}$ je dáno Bolzanovou-Cauchyovou podmínkou.

$\Leftarrow$ Nechť platí podmínka věty. Nechť je funkce F definovaná na prstencovém okolí $P(a, \delta_0)$. Je-li $\{x_n\}$ posloupnost obsažená v $P(a, \delta_0)$ taková, že $\lim x_n = a$, splňuje posloupnost $\{F(x_n)\}$ Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Zvolíme-li totiž $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, nechť kladné $\delta \in \mathbf{R}$ je dáno Bolzanovou-Cauchyovou podmínkou. K δ nalezneme $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$, platí $|x_n - a| < \delta$.

$\Leftarrow$ Nechť platí podmínka věty. Nechť je funkce F definovaná na prstencovém okolí $P(a, \delta_0)$. Je-li $\{x_n\}$ posloupnost obsažená v $P(a, \delta_0)$ taková, že $\lim x_n = a$, splňuje posloupnost $\{F(x_n)\}$ Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Zvolíme-li totiž $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, nechť kladné $\delta \in \mathbf{R}$ je dáno Bolzanovou-Cauchyovou podmínkou. K δ nalezneme $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$, platí $|x_n - a| < \delta$. Pak pro $n, m \in \mathbf{N}$, $n, m \geq n_0$, platí

$$|F(x_n) - F(x_m)| < \varepsilon.$$

Zvolme jednu takovou posloupnost $\{x_n\}$ a položme $A = \lim F(x_n)$.

Zvolme jednu takovou posloupnost $\{x_n\}$ a položme $A = \lim F(x_n)$. Pak $\lim_{x \to a} F(x) = A$. Vezměme totiž libovolnou posloupnost $\{y_n\}$ v $P(a, \delta_0)$ konvergující k a.

Zvolme jednu takovou posloupnost $\{x_n\}$ a položme $A = \lim F(x_n)$. Pak $\lim_{x \to a} F(x) = A$. Vezměme totiž libovolnou posloupnost $\{y_n\}$ v $P(a, \delta_0)$ konvergující k a. Nechť $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ z Bolzanovy–Cauchyovy podmínky. Nechť $n_1 \in \mathbf{N}$ je takové, že

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_1 \colon x_n, y_n \in P(a, \delta).$$

Najdeme ještě $n_2 \in \mathbf{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_2 \colon |F(x_n) - A| < \varepsilon.$$

Pak pro přirozené číslo $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ platí

$$|F(y_n) - A| \leq |F(y_n) - F(x_n)| + |F(x_n) - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Z Heineovy věty máme proto $\lim_{x \to a} F(x) = A$.

Najdeme ještě $n_2 \in \mathbf{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_2 \colon |F(x_n) - A| < \varepsilon.$$

Pak pro přirozené číslo $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ platí

$$|F(y_n) - A| \leq |F(y_n) - F(x_n)| + |F(x_n) - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Z Heineovy věty máme proto $\lim_{x \to a} F(x) = A$. $\square$

Najdeme ještě $n_2 \in \mathbf{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_2 : |F(x_n) - A| < \varepsilon.$$

Pak pro přirozené číslo $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ platí

$$|F(y_n) - A| \leq |F(y_n) - F(x_n)| + |F(x_n) - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Z Heineovy věty máme proto $\lim_{x \to a} F(x) = A$. $\square$

Poznámka

Tvrzení Věty 9.23 platí obdobně i pro jednostranné limity.

Věta 9.24

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* f *je omezená spojitá funkce na* (a, b). *Potom* $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz Věty 9.24

Funkce f má na (a, b) primitivní funkci F.

Důkaz Věty 9.24

Funkce f má na (a, b) primitivní funkci F. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní.

Důkaz Věty 9.24

Funkce f má na (a, b) primitivní funkci F. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Nechť $K \in \mathbf{R}$ je kladné takové, že

$$\forall x \in (a, b) \colon |f(x)| \le K.$$

Důkaz Věty 9.24

Funkce f má na (a, b) primitivní funkci F. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Nechť $K \in \mathbf{R}$ je kladné takové, že

$$\forall x \in (a, b)\colon |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{K}, b - a\}$.

Důkaz Věty 9.24

Funkce f má na (a, b) primitivní funkci F. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Nechť $K \in \mathbf{R}$ je kladné takové, že

$$\forall x \in (a, b)\colon |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{K}, b - a\}$. Pak pro $x, y \in (a, a + \delta)$, $x < y$, platí

$$|F(y) - F(x)|$$

Důkaz Věty 9.24

Funkce f má na (a, b) primitivní funkci F. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Nechť $K \in \mathbf{R}$ je kladné takové, že

$$\forall x \in (a, b)\colon |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{K}, b - a\}$. Pak pro $x, y \in (a, a + \delta)$, $x < y$, platí

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \right|$$

Důkaz Věty 9.24

Funkce f má na (a, b) primitivní funkci F. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Nechť $K \in \mathbf{R}$ je kladné takové, že

$$\forall x \in (a, b)\colon |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{K}, b - a\}$. Pak pro $x, y \in (a, a + \delta)$, $x < y$, platí

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Důkaz Věty 9.24

Funkce f má na (a, b) primitivní funkci F. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Nechť $K \in \mathbf{R}$ je kladné takové, že

$$\forall x \in (a, b)\colon |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{K}, b - a\}$. Pak pro $x, y \in (a, a + \delta)$, $x < y$, platí

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq K|y - x|$$

Důkaz Věty 9.24

Funkce f má na (a, b) primitivní funkci F. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Nechť $K \in \mathbf{R}$ je kladné takové, že

$$\forall x \in (a, b) \colon |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{K}, b - a\}$. Pak pro $x, y \in (a, a + \delta)$, $x < y$, platí

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq K|y - x| < K\delta$$

Důkaz Věty 9.24

Funkce f má na (a, b) primitivní funkci F. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Nechť $K \in \mathbf{R}$ je kladné takové, že

$$\forall x \in (a, b) \colon |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{K}, b - a\}$. Pak pro $x, y \in (a, a + \delta)$, $x < y$, platí

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq K|y - x| < K\delta \leq \varepsilon.$$

Důkaz Věty 9.24

Funkce f má na (a, b) primitivní funkci F. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Nechť $K \in \mathbf{R}$ je kladné takové, že

$$\forall x \in (a, b)\colon |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{K}, b - a\}$. Pak pro $x, y \in (a, a + \delta)$, $x < y$, platí

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq K|y - x| < K\delta \leq \varepsilon.$$

Tedy $\lim_{x \to a_+} F(x)$ existuje vlastní dle Věty 9.23.

Důkaz Věty 9.24

Funkce f má na (a, b) primitivní funkci F. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Nechť $K \in \mathbf{R}$ je kladné takové, že

$$\forall x \in (a, b) \colon |f(x)| \le K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{K}, b - a\}$. Pak pro $x, y \in (a, a + \delta)$, $x < y$, platí

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \right| \le \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \le K|y - x| < K\delta \le \varepsilon.$$

Tedy $\lim_{x \to a_+} F(x)$ existuje vlastní dle Věty 9.23. Existence vlastní limity v b zleva se dokáže obdobně.

Důkaz Věty 9.24

Funkce f má na (a, b) primitivní funkci F. Ukážeme za pomoci Bolzanovo-Caychyovy podmínky pro funkce, že limity F v krajních bodech existují vlastní. Nechť $K \in \mathbf{R}$ je kladné takové, že

$$\forall x \in (a, b) \colon |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{K}, b - a\}$. Pak pro $x, y \in (a, a + \delta)$, $x < y$, platí

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq K|y - x| < K\delta \leq \varepsilon.$$

Tedy $\lim_{x \to a_+} F(x)$ existuje vlastní dle Věty 9.23. Existence vlastní limity v b zleva se dokáže obdobně.

$\square$

Poznámka

Pro neomezený interval tvrzení Věty 9.24 neplatí.

Poznámka

Pro neomezený interval tvrzení Věty 9.24 neplatí. Například funkce $f(x) = 1$, $x \in (0, \infty)$, je spojitá a omezená na $(0, \infty)$, ale $f \notin \mathcal{N}(0, \infty)$.

Poznámka

Pro neomezený interval tvrzení Věty 9.24 neplatí. Například funkce $f(x) = 1$, $x \in (0, \infty)$, je spojitá a omezená na $(0, \infty)$, ale $f \notin \mathcal{N}(0, \infty)$. Funkce $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, $x \in \mathbf{R}$, je na intervalu $\mathbf{R}$ také spojitá a omezená, integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ však dokonce ani neexistuje.

Věta 9.25 (vztah Riemannova a Newtonova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$*,* $a < b$*, a* f *má Riemannův integrál na* $[a, b]$ *a Newtonův integrál na* (a, b)*. Potom*

$$(R) \int_a^b f(x)\,dx = (N) \int_a^b f(x)\,dx.$$

Důkaz Věty 9.25

Zvolme $\varepsilon > 0$.

Důkaz Věty 9.25

Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože funkce f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$,

Důkaz Věty 9.25

Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože funkce f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$, nalezneme podle charakterisace riemannovské integrovatelnosti $\delta > 0$ takové, že pro libovolné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ o normě menší než δ a libovolnou volbu bodů $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$ platí

Důkaz Věty 9.25

Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože funkce f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$, nalezneme podle charakterisace riemannovské integrovatelnosti $\delta > 0$ takové, že pro libovolné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ o normě menší než δ a libovolnou volbu bodů $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$ platí

$$|\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x| < \varepsilon.$$

Důkaz Věty 9.25

Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože funkce f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$, nalezneme podle charakterisace riemannovské integrovatelnosti $\delta > 0$ takové, že pro libovolné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ o normě menší než δ a libovolnou volbu bodů $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$ platí

$$|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x| < \varepsilon.$$

Vezměme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ o normě menší než δ.

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, b) \\ & \end{cases}$$

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, b) \\ \lim_{x \to b_-} F(x), & x = b \\ \end{cases}$$

Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b). Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a,b) \\ \lim_{x\to b_-} F(x), & x = b \\ \lim_{x\to a_+} F(x), & x = a. \end{cases}$$

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, b) \\ \lim_{x \to b_-} F(x), & x = b \\ \lim_{x \to a_+} F(x), & x = a. \end{cases}$$

Povšimněme si, že H je dobře definovaná spojitá funkce na $[a, b]$.

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, b) \\ \lim_{x \to b_-} F(x), & x = b \\ \lim_{x \to a_+} F(x), & x = a. \end{cases}$$

Povšimněme si, že H je dobře definovaná spojitá funkce na $[a, b]$. Navíc $H' = f$ na (a, b).

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, b) \\ \lim_{x \to b_-} F(x), & x = b \\ \lim_{x \to a_+} F(x), & x = a. \end{cases}$$

Povšimněme si, že H je dobře definovaná spojitá funkce na $[a, b]$. Navíc $H' = f$ na (a, b). Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ použijeme Lagrangeovu větu k nalezení bodu $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$, který splňuje

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, b) \\ \lim_{x \to b_-} F(x), & x = b \\ \lim_{x \to a_+} F(x), & x = a. \end{cases}$$

Povšimněme si, že H je dobře definovaná spojitá funkce na $[a, b]$. Navíc $H' = f$ na (a, b). Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ použijeme Lagrangeovu větu k nalezení bodu $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$, který splňuje

$$H(x_i) - H(x_{i-1})$$

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, b) \\ \lim_{x \to b_-} F(x), & x = b \\ \lim_{x \to a_+} F(x), & x = a. \end{cases}$$

Povšimněme si, že H je dobře definovaná spojitá funkce na $[a, b]$. Navíc $H' = f$ na (a, b). Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ použijeme Lagrangeovu větu k nalezení bodu $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$, který splňuje

$$H(x_i) - H(x_{i-1}) = H'(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, b) \\ \lim_{x \to b_-} F(x), & x = b \\ \lim_{x \to a_+} F(x), & x = a. \end{cases}$$

Povšimněme si, že H je dobře definovaná spojitá funkce na $[a, b]$. Navíc $H' = f$ na (a, b). Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ použijeme Lagrangeovu větu k nalezení bodu $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$, který splňuje

$$H(x_i) - H(x_{i-1}) = H'(t_i)(x_i - x_{i-1}) = f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Pak

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Pak

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Pak

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x)$$

Pak

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x) = H(b) - H(a)$$

Pak

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x) = H(b) - H(a)$$

$$= H(x_n) - H(x_0)$$

Pak

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x) = H(b) - H(a)$$

$$= H(x_n) - H(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \bigl(H(x_i) - H(x_{i-1})\bigr)$$

Pak

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x) = H(b) - H(a)$$

$$= H(x_n) - H(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \big(H(x_i) - H(x_{i-1})\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot(x_i - x_{i-1}).$$

Tedy

$$\left|(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

Pak

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x) = H(b) - H(a)$$

$$= H(x_n) - H(x_0) = \sum_{i=1}^{n}\big(H(x_i) - H(x_{i-1})\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot(x_i - x_{i-1}).$$

Tedy

$$\left|(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

Pak

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x) = H(b) - H(a)$$

$$= H(x_n) - H(x_0) = \sum_{i=1}^{n}\big(H(x_i) - H(x_{i-1})\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot(x_i - x_{i-1}).$$

Tedy

$$\left|(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

Pak

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x) = H(b) - H(a)$$

$$= H(x_n) - H(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \big(H(x_i) - H(x_{i-1})\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot(x_i - x_{i-1}).$$

Tedy

$$\left|(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

Důsledek 9.26

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* f *je spojitá funkce na* $[a, b]$.
Potom $f \in \mathcal{R}(a, b) \cap \mathcal{N}(a, b)$ *a*

$$(R) \int_a^b f(x)\, dx = (N) \int_a^b f(x)\, dx.$$