18. přednáška, 20. 4. 2020

Věta 9.15

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$*,* $a < b$*, a* $f \in \mathcal{R}([a, b])$*.*

Věta 9.15

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* $f \in \mathcal{R}([a, b])$. *Jestliže g je funkce definovaná alespoň na* $[a, b]$, *která se v intervalu* $[a, b]$ *liší od f v konečném počtu bodů,*

Věta 9.15

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* $f \in \mathcal{R}([a, b])$.*Jestliže* g *je funkce definovaná alespoň na* $[a, b]$, *která se v intervalu* $[a, b]$ *liší od* f *v konečném počtu bodů, potom* $g \in \mathcal{R}([a, b])$ *a* $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Důkaz Věty 9.15

Funkce f je omezená,

Důkaz Věty 9.15

Funkce f je omezená, a proto je omezená i funkce g.

Důkaz Věty 9.15

Funkce f je omezená, a proto je omezená i funkce g. Nalezneme kladné číslo $K > 0$ takové, že pro každé $x \in [a, b]$ platí $|f(x)| \le K$ a $|g(x)| \le K$. Označme $J = \{x \in [a, b];\ f(x) \neq g(x)\}$.

Důkaz Věty 9.15

Funkce f je omezená, a proto je omezená i funkce g. Nalezneme kladné číslo $K > 0$ takové, že pro každé $x \in [a, b]$ platí $|f(x)| \leq K$ a $|g(x)| \leq K$. Označme $J = \{x \in [a, b];\ f(x) \neq g(x)\}$. Množina J je podle předpokladu konečná.

Důkaz Věty 9.15

Funkce f je omezená, a proto je omezená i funkce g. Nalezneme kladné číslo $K > 0$ takové, že pro každé $x \in [a, b]$ platí $|f(x)| \leq K$ a $|g(x)| \leq K$. Označme $J = \{x \in [a, b];\ f(x) \neq g(x)\}$. Množina J je podle předpokladu konečná. Pokud je prázdná, pak je tvrzení zřejmé,

Důkaz Věty 9.15

Funkce f je omezená, a proto je omezená i funkce g. Nalezneme kladné číslo $K > 0$ takové, že pro každé $x \in [a, b]$ platí $|f(x)| \leq K$ a $|g(x)| \leq K$. Označme $J = \{x \in [a, b];\ f(x) \neq g(x)\}$. Množina J je podle předpokladu konečná. Pokud je prázdná, pak je tvrzení zřejmé, v opačném případě označme m počet prvků množiny J.

Zvolme $\varepsilon > 0$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \frac{\varepsilon}{4Km}$ a

Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \frac{\varepsilon}{4Km}$ a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \frac{\varepsilon}{4Km}$ a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Označme $\mathcal{I}$ systém obsahující všechny intervaly tvaru $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \frac{\varepsilon}{4Km}$ a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Označme $\mathcal{I}$ systém obsahující všechny intervaly tvaru $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Označme $\mathcal{S}$ systém těch intervalů z $\mathcal{I}$, které mají neprázdný průnik s J.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \frac{\varepsilon}{4Km}$ a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \le \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Označme $\mathcal{I}$ systém obsahující všechny intervaly tvaru $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Označme $\mathcal{S}$ systém těch intervalů z $\mathcal{I}$, které mají neprázdný průnik s J. Systém $\mathcal{S}$ má tedy nejvýše $2m$ prvků, neboť každý bod z J je prvkem nejvýše dvou intervalů z $\mathcal{I}$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \frac{\varepsilon}{4Km}$ a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

Označme $\mathcal{I}$ systém obsahující všechny intervaly tvaru $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Označme $\mathcal{S}$ systém těch intervalů z $\mathcal{I}$, které mají neprázdný průnik s J. Systém $\mathcal{S}$ má tedy nejvýše $2m$ prvků, neboť každý bod z J je prvkem nejvýše dvou intervalů z $\mathcal{I}$.

Potom platí

$$\overline{S}(f, D) - \overline{S}(g, D) = \sum_{I \in \mathcal{I}} \sup_I f \cdot |I| - \sum_{I \in \mathcal{I}} \sup_I g \cdot |I|$$

Potom platí

$$\overline{S}(f, D) - \overline{S}(g, D) = \sum_{I \in \mathcal{I}} \sup_I f \cdot |I| - \sum_{I \in \mathcal{I}} \sup_I g \cdot |I|$$

$$= \sum_{I \in \mathcal{S}} (\sup_I f - \sup_I g) \cdot |I|,$$

Potom platí

$$\overline{S}(f, D) - \overline{S}(g, D) = \sum_{I \in \mathcal{I}} \sup_I f \cdot |I| - \sum_{I \in \mathcal{I}} \sup_I g \cdot |I|$$

$$= \sum_{I \in \mathcal{S}} (\sup_I f - \sup_I g) \cdot |I|,$$

neboť $\sup_I f = \sup_I g$, pokud $I \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{S}$.

Můžeme tedy odhadnout

$$|\overline{S}(f, D) - \overline{S}(g, D)| \leq \sum_{I \in \mathcal{S}} (|\sup_I f| + |\sup_I g|) \cdot |I|$$

Můžeme tedy odhadnout

$$|\overline{S}(f,D)-\overline{S}(g,D)| \leq \sum_{I\in\mathcal{S}}(|\sup_I f|+|\sup_I g|)\cdot|I|$$

$$\leq \sum_{I\in\mathcal{S}} 2K\cdot|I| \leq \sum_{I\in\mathcal{S}} 2K\cdot\nu(D)$$

Můžeme tedy odhadnout

$$|\overline{S}(f,D)-\overline{S}(g,D)| \leq \sum_{I\in\mathcal{S}}(|\sup_I f| + |\sup_I g|)\cdot|I|$$

$$\leq \sum_{I\in\mathcal{S}} 2K\cdot|I| \leq \sum_{I\in\mathcal{S}} 2K\cdot\nu(D)$$

$$\leq 2m\cdot 2K\cdot\nu(D) < \varepsilon.$$

Můžeme tedy odhadnout

$$|\overline{S}(f,D)-\overline{S}(g,D)| \leq \sum_{I\in\mathcal{S}}(|\sup_I f| + |\sup_I g|)\cdot|I|$$

$$\leq \sum_{I\in\mathcal{S}} 2K\cdot|I| \leq \sum_{I\in\mathcal{S}} 2K\cdot\nu(D)$$

$$\leq 2m\cdot 2K\cdot\nu(D) < \varepsilon.$$

Obdobně obdržíme

$$|\underline{S}(f,D)-\underline{S}(g,D)| < \varepsilon.$$

Pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - 2\varepsilon$$

Pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - 2\varepsilon < \underline{S}(f, D) - \varepsilon$$

Pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - 2\varepsilon < \underline{S}(f, D) - \varepsilon < \underline{S}(g, D) \leq \overline{S}(g, D)$$

Pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - 2\varepsilon < \underline{S}(f, D) - \varepsilon < \underline{S}(g, D) \leq \overline{S}(g, D)$$

$$< \overline{S}(f, D) + \varepsilon$$

Pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - 2\varepsilon < \underline{S}(f, D) - \varepsilon < \underline{S}(g, D) \leq \overline{S}(g, D)$$

$$< \overline{S}(f, D) + \varepsilon < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + 2\varepsilon.$$

Pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - 2\varepsilon < \underline{S}(f,D) - \varepsilon < \underline{S}(g,D) \leq \overline{S}(g,D)$$

$$< \overline{S}(f,D) + \varepsilon < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + 2\varepsilon.$$

Odtud plyne, že g je na intervalu $[a,b]$ riemannovsky intergrovatelná a $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta 9.16

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* f *je funkce definovaná na intervalu* $[a, b]$.

Věta 9.16

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* f *je funkce definovaná na intervalu* $[a, b]$. *Pak jsou následující výroky ekvivalentní.*

(i) *Funkce* f *je riemannovsky integrovatelná na intervalu* $[a, b]$.

Věta 9.16

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* f *je funkce definovaná na intervalu* $[a, b]$. *Pak jsou následující výroky ekvivalentní.*

(i) *Funkce* f *je riemannovsky integrovatelná na intervalu* $[a, b]$.

(ii) *Existuje* $I \in \mathbf{R}$ *takové, že pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *splňující:*

Věta 9.16

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a f je funkce definovaná na intervalu $[a, b]$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní.

(i) *Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$.*

(ii) *Existuje $I \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ splňující: je-li $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení intervalu $[a, b]$ takové, že $\nu(D) < \delta$, a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, pak*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon.$$

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Zvolme $\varepsilon > 0$.

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové,

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon$$

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon < \underline{S}(f, D)$$

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon < \underline{S}(f, D)$$

$$\leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon$$

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \underline{S}(f, D)$$

$$\leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon = I + \varepsilon.$$

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \underline{S}(f, D)$$

$$\leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon = I + \varepsilon.$$

Je-li tedy $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení splňující $\nu(D) < \delta$

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \underline{S}(f, D)$$

$$\leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon = I + \varepsilon.$$

Je-li tedy $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení splňující $\nu(D) < \delta$ a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$,

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \underline{S}(f, D)$$

$$\leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon = I + \varepsilon.$$

Je-li tedy $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení splňující $\nu(D) < \delta$ a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, pak

$$I - \varepsilon$$

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon < \underline{S}(f, D)$$

$$\leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon = I + \varepsilon.$$

Je-li tedy $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení splňující $\nu(D) < \delta$ a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, pak

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, D)$$

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon < \underline{S}(f, D)$$

$$\leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon = I + \varepsilon.$$

Je-li tedy $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení splňující $\nu(D) < \delta$ a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, pak

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < \underline{S}(f, D)$$

$$\leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon = I + \varepsilon.$$

Je-li tedy $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení splňující $\nu(D) < \delta$ a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, pak

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \overline{S}(f, D)$$

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon < \underline{S}(f, D)$$

$$\leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon = I + \varepsilon.$$

Je-li tedy $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení splňující $\nu(D) < \delta$ a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, pak

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon.$$

Důkaz Věty 9.16

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ukážeme, že podmínka (ii) je splněna pro $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 9.3 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon < \underline{S}(f, D)$$

$$\leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon = I + \varepsilon.$$

Je-li tedy $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení splňující $\nu(D) < \delta$ a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, pak

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon.$$

Výrok (ii) tedy platí.

(ii)$\Rightarrow$(i)

(ii)$\Rightarrow$(i) Nechť (ii) je splněna pro $I \in \mathbf{R}$.

(ii)$\Rightarrow$(i) Nechť (ii) je splněna pro $I \in \mathbf{R}$. Nejprve ukážeme, že z platnosti (ii) plyne omezenost f.

(ii)$\Rightarrow$(i) Nechť (ii) je splněna pro $I \in \mathbf{R}$. Nejprve ukážeme, že z platnosti (ii) plyne omezenost f. Pro $\varepsilon = 1$ nalezneme $\delta > 0$ podle (ii).

(ii)$\Rightarrow$(i) Nechť (ii) je splněna pro $I \in \mathbf{R}$. Nejprve ukážeme, že z platnosti (ii) plyne omezenost f. Pro $\varepsilon = 1$ nalezneme $\delta > 0$ podle (ii). Pak pro dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ splňující $\nu(D) < \delta$ máme

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I\right| < \varepsilon = 1$$

(ii)$\Rightarrow$(i) Nechť (ii) je splněna pro $I \in \mathbf{R}$. Nejprve ukážeme, že z platnosti (ii) plyne omezenost f. Pro $\varepsilon = 1$ nalezneme $\delta > 0$ podle (ii). Pak pro dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ splňující $\nu(D) < \delta$ máme

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I\right| < \varepsilon = 1$$

pro každou volbu bodů $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$.

Uvažujme jedno takové pevné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$

Uvažujme jedno takové pevné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ a označme

$$\eta = \min\bigl\{x_i - x_{i-1};\ i \in \{1, \dots, n\}\bigr\},$$

Uvažujme jedno takové pevné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ a označme

$$\eta = \min\Big\{x_i - x_{i-1};\ i \in \{1, \dots, n\}\Big\},$$

$$K = \max\Big\{|f(x_i)|;\ i \in \{1, \dots, n\}\Big\}.$$

Uvažujme jedno takové pevné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ a označme

$$\eta = \min\big\{x_i - x_{i-1};\ i \in \{1, \dots, n\}\big\},$$

$$K = \max\big\{|f(x_i)|;\ i \in \{1, \dots, n\}\big\}.$$

Mějme $t \in [a, b]$ dáno libovolné.

Uvažujme jedno takové pevné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ a označme

$$\eta = \min\bigl\{x_i - x_{i-1};\ i \in \{1, \dots, n\}\bigr\},$$

$$K = \max\bigl\{|f(x_i)|;\ i \in \{1, \dots, n\}\bigr\}.$$

Mějme $t \in [a, b]$ dáno libovolné. Nalezneme $j \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $t \in [x_{j-1}, x_j]$.

Uvažujme jedno takové pevné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ a označme

$$\eta = \min\bigl\{x_i - x_{i-1};\ i \in \{1, \dots, n\}\bigr\},$$

$$K = \max\bigl\{|f(x_i)|;\ i \in \{1, \dots, n\}\bigr\}.$$

Mějme $t \in [a, b]$ dáno libovolné. Nalezneme $j \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $t \in [x_{j-1}, x_j]$. Uvažujme body

$$t_i = \begin{cases} x_i, & i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\} \\ & \end{cases}$$

Uvažujme jedno takové pevné dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ a označme

$$\eta = \min\big\{x_i - x_{i-1};\ i \in \{1, \dots, n\}\big\},$$

$$K = \max\big\{|f(x_i)|;\ i \in \{1, \dots, n\}\big\}.$$

Mějme $t \in [a, b]$ dáno libovolné. Nalezneme $j \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $t \in [x_{j-1}, x_j]$. Uvažujme body

$$t_i = \begin{cases} x_i, & i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\} \\ t, & i = j. \end{cases}$$

Pak

$$|f(t)(x_j - x_{j-1})|$$

Pak

$$|f(t)(x_j - x_{j-1})| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\right|$$

Pak

$$|f(t)(x_j - x_{j-1})| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\right|$$

Pak

$$|f(t)(x_j - x_{j-1})| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\right|$$

Pak

$$|f(t)(x_j - x_{j-1})| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\right|$$

$$\leq |\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I|$$

Pak

$$|f(t)(x_j - x_{j-1})| = \Big|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\Big|$$

$$= \Big|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\Big|$$

$$\leq |\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I| + |I|$$

Pak

$$|f(t)(x_j - x_{j-1})| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i\neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i\neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\right|$$

$$\leq |\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I| + |I| + \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)(x_i - x_{i-1})|$$

Pak

$$|f(t)(x_j - x_{j-1})| = \Big|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\Big|$$

$$= \Big|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\Big|$$

$$\leq |\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I| + |I| + \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)(x_i - x_{i-1})|$$

$$\leq 1 + |I| + \sum_{i=1}^{n} K(x_i - x_{i-1})$$

Pak

$$|f(t)(x_j - x_{j-1})| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\right|$$

$$\leq |\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I| + |I| + \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)(x_i - x_{i-1})|$$

$$\leq 1 + |I| + \sum_{i=1}^{n} K(x_i - x_{i-1}) = 1 + |I| + K(b-a).$$

Pak

$$|f(t)(x_j - x_{j-1})| = \Big|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i\neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\Big|$$

$$= \Big|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i\neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\Big|$$

$$\leq |\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I| + |I| + \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)(x_i - x_{i-1})|$$

$$\leq 1 + |I| + \sum_{i=1}^{n} K(x_i - x_{i-1}) = 1 + |I| + K(b-a).$$

Tedy platí

$$|f(t)| \leq \frac{1}{\eta}\big(1 + |I| + K(b-a)\big)$$

Pak

$$|f(t)(x_j - x_{j-1})| = \Big|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i\neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\Big|$$

$$= \Big|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i\neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\Big|$$

$$\leq |\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I| + |I| + \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)(x_i - x_{i-1})|$$

$$\leq 1 + |I| + \sum_{i=1}^{n} K(x_i - x_{i-1}) = 1 + |I| + K(b-a).$$

Tedy platí

$$|f(t)| \leq \frac{1}{\eta}\big(1 + |I| + K(b-a)\big)$$

a f je omezená.

Můžeme tedy použít Větu 9.5.

Můžeme tedy použít Větu 9.5. Nechť $\varepsilon > 0$. Podle (ii) nalezneme příslušné $\delta > 0$.

Můžeme tedy použít Větu 9.5. Nechť $\varepsilon > 0$. Podle (ii) nalezneme příslušné $\delta > 0$. Nechť $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ je libovolné dělení $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$.

Můžeme tedy použít Větu 9.5. Nechť $\varepsilon > 0$. Podle (ii) nalezneme příslušné $\delta > 0$. Nechť $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ je libovolné dělení $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ nalezneme $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ takové, že

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f < f(t_i) + \varepsilon.$$

Pak máme

$$\overline{S}(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Pak máme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) + \varepsilon)(x_i - x_{i-1})$$

Pak máme

$$\overline{S}(f,D)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1})<\sum_{i=1}^{n}(f(t_i)+\varepsilon)(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i-x_{i-1})+\varepsilon(b-a)$$

Pak máme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) + \varepsilon)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(b - a) \leq I + \varepsilon + \varepsilon(b - a).$$

Pak máme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) + \varepsilon)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(b - a) \leq I + \varepsilon + \varepsilon(b - a).$$

Obdobně odvodíme

$$\underline{S}(f, D) > I - \varepsilon - \varepsilon(b - a).$$

Pak máme

$$\overline{S}(f,D)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1})<\sum_{i=1}^{n}(f(t_i)+\varepsilon)(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i-x_{i-1})+\varepsilon(b-a)\leq I+\varepsilon+\varepsilon(b-a).$$

Obdobně odvodíme

$$\underline{S}(f,D)>I-\varepsilon-\varepsilon(b-a).$$

Tedy dostáváme

$$\overline{S}(f,D)-\underline{S}(f,D)<2(1+b-a)\varepsilon.$$

Pak máme

$$\overline{S}(f,D)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1})<\sum_{i=1}^{n}(f(t_i)+\varepsilon)(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i-x_{i-1})+\varepsilon(b-a)\le I+\varepsilon+\varepsilon(b-a).$$

Obdobně odvodíme

$$\underline{S}(f,D)>I-\varepsilon-\varepsilon(b-a).$$

Tedy dostáváme

$$\overline{S}(f,D)-\underline{S}(f,D)<2(1+b-a)\varepsilon.$$

Tedy f je riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$. $\square$

Poznámka

Platí-li (i), pak je pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ splněna podmínka (ii).

Poznámka

Platí-li (i), pak je pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ splněna podmínka (ii). Platí-li (ii), máme z důkazu implikace (ii) $\Rightarrow$ (i), že pro kladné ε existuje kladné δ takové, že pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$\overline{S}(f, D) < I + \varepsilon(1 + b - a).$$

Poznámka

Platí-li (i), pak je pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ splněna podmínka (ii). Platí-li (ii), máme z důkazu implikace (ii) $\Rightarrow$ (i), že pro kladné ε existuje kladné δ takové, že pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$\overline{S}(f, D) < I + \varepsilon(1 + b - a).$$

Tedy

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon(1 + b - a).$$

Poznámka

Platí-li (i), pak je pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ splněna podmínka (ii). Platí-li (ii), máme z důkazu implikace (ii) $\Rightarrow$ (i), že pro kladné ε existuje kladné δ takové, že pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$\overline{S}(f, D) < I + \varepsilon(1 + b - a).$$

Tedy

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon(1 + b - a).$$

Tedy $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq I$.

Poznámka

Platí-li (i), pak je pro $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ splněna podmínka (ii). Platí-li (ii), máme z důkazu implikace (ii) $\Rightarrow$ (i), že pro kladné ε existuje kladné δ takové, že pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$\overline{S}(f, D) < I + \varepsilon(1 + b - a).$$

Tedy

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon(1 + b - a).$$

Tedy $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq I$. Obdobně odvodíme $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq I$,

Poznámka

Platí-li (i), pak je pro $I = \int_a^b f(x)\,dx$ splněna podmínka (ii). Platí-li (ii), máme z důkazu implikace (ii) $\Rightarrow$ (i), že pro kladné ε existuje kladné δ takové, že pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$\overline{S}(f, D) < I + \varepsilon(1 + b - a).$$

Tedy

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon(1 + b - a).$$

Tedy $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq I$. Obdobně odvodíme $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \geq I$, a tedy $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

Poznámka

Podmínka (ii) Věty 9.16 je původní Riemannovou definicí Riemannova integrálu. Náš výklad sledoval alternativní přístup, který náleží Darbouxovi.