17. přednáška, 16. 4. 2020

Věta 9.12

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Věta 9.12

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* $f \in \mathcal{R}([a, b])$. *Pak* $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$ *a platí*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$,

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, takže je omezená na $[a, b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a, b]$.

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, takže je omezená na $[a, b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a, b]$.

Pro libovolný neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí
$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, takže je omezená na $[a, b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a, b]$.

Pro libovolný neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Nerovnost ověříme následovně.

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, takže je omezená na $[a, b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a, b]$.
Pro libovolný neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Nerovnost ověříme následovně. Zvolme $\eta > 0$.

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a,b]$, takže je omezená na $[a,b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a,b]$.
Pro libovolný neprázdný interval $I \subset [a,b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Nerovnost ověříme následovně. Zvolme $\eta > 0$. Pak použitím definice suprema a infima nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(y)| \leq \inf_I |f| + \eta$$

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, takže je omezená na $[a, b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a, b]$.

Pro libovolný neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Nerovnost ověříme následovně. Zvolme $\eta > 0$. Pak použitím definice suprema a infima nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(y)| \leq \inf_I |f| + \eta \quad \text{a} \quad |f(x)| \geq \sup_I |f| - \eta.$$

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a,b]$, takže je omezená na $[a,b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a,b]$.
Pro libovolný neprázdný interval $I \subset [a,b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Nerovnost ověříme následovně. Zvolme $\eta > 0$. Pak použitím definice suprema a infima nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(y)| \leq \inf_I |f| + \eta \quad \text{a} \quad |f(x)| \geq \sup_I |f| - \eta.$$

Pak máme

$$\sup_I |f| - \inf_I |f|$$

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, takže je omezená na $[a, b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a, b]$.
Pro libovolný neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \le \sup_I f - \inf_I f.$$

Nerovnost ověříme následovně. Zvolme $\eta > 0$. Pak použitím definice suprema a infima nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(y)| \le \inf_I |f| + \eta \quad \text{a} \quad |f(x)| \ge \sup_I |f| - \eta.$$

Pak máme

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \le |f(x)| + \eta - |f(y)| + \eta$$

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, takže je omezená na $[a, b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a, b]$.

Pro libovolný neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Nerovnost ověříme následovně. Zvolme $\eta > 0$. Pak použitím definice suprema a infima nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(y)| \leq \inf_I |f| + \eta \quad \text{a} \quad |f(x)| \geq \sup_I |f| - \eta.$$

Pak máme

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq |f(x)| + \eta - |f(y)| + \eta$$

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a,b]$, takže je omezená na $[a,b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a,b]$.
Pro libovolný neprázdný interval $I \subset [a,b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Nerovnost ověříme následovně. Zvolme $\eta > 0$. Pak použitím definice suprema a infima nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(y)| \leq \inf_I |f| + \eta \quad \text{a} \quad |f(x)| \geq \sup_I |f| - \eta.$$

Pak máme

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq |f(x)| + \eta - |f(y)| + \eta$$

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, takže je omezená na $[a, b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a, b]$.

Pro libovolný neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Nerovnost ověříme následovně. Zvolme $\eta > 0$. Pak použitím definice suprema a infima nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(y)| \leq \inf_I |f| + \eta \quad \text{a} \quad |f(x)| \geq \sup_I |f| - \eta.$$

Pak máme

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq |f(x)| + \eta - |f(y)| + \eta = |f(x)| - |f(y)| + 2\eta$$

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$, takže je omezená na $[a, b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a, b]$.

Pro libovolný neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Nerovnost ověříme následovně. Zvolme $\eta > 0$. Pak použitím definice suprema a infima nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(y)| \leq \inf_I |f| + \eta \quad \text{a} \quad |f(x)| \geq \sup_I |f| - \eta.$$

Pak máme

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq |f(x)| + \eta - |f(y)| + \eta = |f(x)| - |f(y)| + 2\eta$$

$$\leq |f(x) - f(y)| + 2\eta$$

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a,b]$, takže je omezená na $[a,b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a,b]$.
Pro libovolný neprázdný interval $I \subset [a,b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Nerovnost ověříme následovně. Zvolme $\eta > 0$. Pak použitím definice suprema a infima nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(y)| \leq \inf_I |f| + \eta \quad \text{a} \quad |f(x)| \geq \sup_I |f| - \eta.$$

Pak máme

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq |f(x)| + \eta - |f(y)| + \eta = |f(x)| - |f(y)| + 2\eta$$

$$\leq |f(x) - f(y)| + 2\eta \leq \sup_I f - \inf_I f + 2\eta.$$

Důkaz věty 9.12

Funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a,b]$, takže je omezená na $[a,b]$, a tedy i $|f|$ je omezená na $[a,b]$.

Pro libovolný neprázdný interval $I \subset [a,b]$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Nerovnost ověříme následovně. Zvolme $\eta > 0$. Pak použitím definice suprema a infima nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(y)| \leq \inf_I |f| + \eta \quad \text{a} \quad |f(x)| \geq \sup_I |f| - \eta.$$

Pak máme

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq |f(x)| + \eta - |f(y)| + \eta = |f(x)| - |f(y)| + 2\eta$$

$$\leq |f(x) - f(y)| + 2\eta \leq \sup_I f - \inf_I f + 2\eta.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Použijeme Větu 9.5 pro funkci f a nalezneme dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Použijeme Větu 9.5 pro funkci f a nalezneme dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$. Z již dokázané nerovnosti plyne, že

$$\overline{S}(|f|, D) - \underline{S}(|f|, D)$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Použijeme Větu 9.5 pro funkci f a nalezneme dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$. Z již dokázané nerovnosti plyne, že

$$\overline{S}(|f|, D) - \underline{S}(|f|, D) \leq \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D)$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Použijeme Větu 9.5 pro funkci f a nalezneme dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$. Z již dokázané nerovnosti plyne, že

$$\overline{S}(|f|, D) - \underline{S}(|f|, D) \leq \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Použijeme Větu 9.5 pro funkci f a nalezneme dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$. Z již dokázané nerovnosti plyne, že

$$\overline{S}(|f|, D) - \underline{S}(|f|, D) \leq \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Podle Věty 9.5 je tedy $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Použijeme Větu 9.5 pro funkci f a nalezneme dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$. Z již dokázané nerovnosti plyne, že

$$\overline{S}(|f|, D) - \underline{S}(|f|, D) \leq \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Podle Věty 9.5 je tedy $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$. Zbývá odvodit příslušnou nerovnost.

Pro každé dělení D' intervalu $[a, b]$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{S}(f, D') \le \overline{S}(|f|, D'),$$

Pro každé dělení D' intervalu $[a,b]$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{S}(f, D') \le \overline{S}(|f|, D'),$$

a tedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Pro každé dělení D' intervalu $[a, b]$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(|f|, D'),$$

a tedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Funkce $-f$ je riemannovsky integrovatelná podle Věty 9.9.

Pro každé dělení D' intervalu $[a, b]$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(|f|, D'),$$

a tedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Funkce $-f$ je riemannovsky integrovatelná podle Věty 9.9. Pak

$$-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Pro každé dělení D' intervalu $[a, b]$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(|f|, D'),$$

a tedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Funkce $-f$ je riemannovsky integrovatelná podle Věty 9.9. Pak

$$-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (-f(x))\,\mathrm{d}x$$

Pro každé dělení D' intervalu $[a,b]$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{S}(f,D') \le \overline{S}(|f|,D'),$$

a tedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Funkce $-f$ je riemannovsky integrovatelná podle Věty 9.9. Pak

$$-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (-f(x))\,\mathrm{d}x \le \int_a^b |-f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Pro každé dělení D' intervalu $[a,b]$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f,D') \leq \overline{S}(|f|,D'),$$

a tedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Funkce $-f$ je riemannovsky integrovatelná podle Věty 9.9. Pak

$$-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (-f(x))\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |-f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

Věta 9.13 (derivace funkce horní meze)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval a f je funkce definovaná na J splňující $f \in \mathcal{R}([a, b])$ pro každé $a, b \in J$.

Věta 9.13 (derivace funkce horní meze)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval a f je funkce definovaná na J splňující $f \in \mathcal{R}([a, b])$ pro každé $a, b \in J$. Nechť $c \in J$.

Věta 9.13 (derivace funkce horní meze)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval a f je funkce definovaná na J splňující $f \in \mathcal{R}([a,b])$ pro každé $a, b \in J$. Nechť $c \in J$. Definujeme funkci F na J předpisem

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt, \quad x \in J.$$

Věta 9.13 (derivace funkce horní meze)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval a f je funkce definovaná na J splňující $f \in \mathcal{R}([a, b])$ pro každé $a, b \in J$. Nechť $c \in J$. Definujeme funkci F na J předpisem

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt, \quad x \in J.$$

Potom platí:

(a) *F je spojitá na J,*

Věta 9.13 (derivace funkce horní meze)

Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je nedegenerovaný interval a f je funkce definovaná na J splňující $f \in \mathcal{R}([a,b])$ pro každé $a, b \in J$. Nechť $c \in J$. Definujeme funkci F na J předpisem

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt, \quad x \in J.$$

Potom platí:

(a) *F je spojitá na J,*

(b) *jestliže x_0 je vnitřním bodem intervalu J a funkce f je spojitá v x_0, pak $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Důkaz Věty 9.13

(a) Nechť $y_0 \in J$ není pravý krajní bod J.

Důkaz Věty 9.13

(a) Nechť $y_0 \in J$ není pravý krajní bod J.Dokážeme, že

$$\lim_{y \to y_{0+}} F(y) = F(y_0).$$

Důkaz Věty 9.13

(a) Nechť $y_0 \in J$ není pravý krajní bod J.Dokážeme, že

$$\lim_{y \to y_{0+}} F(y) = F(y_0).$$

Nalezneme $\delta > 0$, takové, že $[y_0, y_0 + \delta] \subset J$.

Důkaz Věty 9.13

(a) Nechť $y_0 \in J$ není pravý krajní bod J.Dokážeme, že

$$\lim_{y \to y_{0+}} F(y) = F(y_0).$$

Nalezneme $\delta > 0$, takové, že $[y_0, y_0 + \delta] \subset J$. Protože je f riemannovsky integrovatelná na $[y_0, y_0 + \delta]$,

Důkaz Věty 9.13

(a) Nechť $y_0 \in J$ není pravý krajní bod J.Dokážeme, že

$$\lim_{y \to y_{0+}} F(y) = F(y_0).$$

Nalezneme $\delta > 0$, takové, že $[y_0, y_0 + \delta] \subset J$. Protože je f riemannovsky integrovatelná na $[y_0, y_0 + \delta]$, je f na tomto intervalu omezená.

Důkaz Věty 9.13

(a) Nechť $y_0 \in J$ není pravý krajní bod J.Dokážeme, že

$$\lim_{y \to y_{0+}} F(y) = F(y_0).$$

Nalezneme $\delta > 0$, takové, že $[y_0, y_0 + \delta] \subset J$. Protože je f riemannovsky integrovatelná na $[y_0, y_0 + \delta]$, je f na tomto intervalu omezená. Nechť K je kladné číslo splňující

$$\forall x \in [y_0, y_0 + \delta] \colon |f(x)| \leq K.$$

Pro $y \in [y_0, y_0 + \delta]$ pak máme

Pro $y \in [y_0, y_0 + \delta]$ pak máme

$$|F(y) - F(y_0)|$$

Pro $y \in [y_0, y_0 + \delta]$ pak máme

$$|F(y) - F(y_0)| = \left| \int_c^y f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^{y_0} f(x)\,\mathrm{d}x \right|$$

Pro $y \in [y_0, y_0 + \delta]$ pak máme

$$|F(y) - F(y_0)| = |\int_c^y f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^{y_0} f(x)\,\mathrm{d}x| = |\int_{y_0}^y f(x)\,\mathrm{d}x|$$

Pro $y \in [y_0, y_0 + \delta]$ pak máme

$$|F(y) - F(y_0)| = |\int_c^y f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^{y_0} f(x)\,\mathrm{d}x| = |\int_{y_0}^y f(x)\,\mathrm{d}x|$$

$$\leq \int_{y_0}^y |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Pro $y \in [y_0, y_0 + \delta]$ pak máme

$$|F(y) - F(y_0)| = \left| \int_c^y f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^{y_0} f(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_{y_0}^y f(x)\,\mathrm{d}x \right|$$

$$\leq \int_{y_0}^y |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{y_0}^y K\,\mathrm{d}x$$

Pro $y \in [y_0, y_0 + \delta]$ pak máme

$$|F(y) - F(y_0)| = \left| \int_c^y f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^{y_0} f(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_{y_0}^y f(x)\,\mathrm{d}x \right|$$

$$\leq \int_{y_0}^y |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{y_0}^y K\,\mathrm{d}x = K(y - y_0).$$

Pro $y \in [y_0, y_0 + \delta]$ pak máme

$$|F(y) - F(y_0)| = |\int_c^y f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^{y_0} f(x)\,\mathrm{d}x| = |\int_{y_0}^y f(x)\,\mathrm{d}x|$$

$$\leq \int_{y_0}^y |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{y_0}^y K\,\mathrm{d}x = K(y - y_0).$$

Odtud plyne

$$\lim_{y \to y_{0_+}} |F(y) - F(y_0)| = 0,$$

Pro $y \in [y_0, y_0 + \delta]$ pak máme

$$|F(y) - F(y_0)| = |\int_c^y f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^{y_0} f(x)\,\mathrm{d}x| = |\int_{y_0}^y f(x)\,\mathrm{d}x|$$

$$\leq \int_{y_0}^y |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{y_0}^y K\,\mathrm{d}x = K(y - y_0).$$

Odtud plyne

$$\lim_{y \to y_{0_+}} |F(y) - F(y_0)| = 0,$$

neboli

$$\lim_{y \to y_{0_+}} F(y) = F(y_0).$$

Pro $y \in [y_0, y_0 + \delta]$ pak máme

$$|F(y) - F(y_0)| = |\int_c^y f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^{y_0} f(x)\,\mathrm{d}x| = |\int_{y_0}^y f(x)\,\mathrm{d}x|$$

$$\leq \int_{y_0}^y |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{y_0}^y K\,\mathrm{d}x = K(y - y_0).$$

Odtud plyne

$$\lim_{y \to y_{0_+}} |F(y) - F(y_0)| = 0,$$

neboli

$$\lim_{y \to y_{0_+}} F(y) = F(y_0).$$

Spojitost zleva v bodech J, které nejsou levým krajním bodem J, lze dokázat obdobně.

(b) Nechť $x_0 \in J$ je bodem spojitosti f.

(b) Nechť $x_0 \in J$ je bodem spojitosti f. Zvolme $\varepsilon > 0$.

(b) Nechť $x_0 \in J$ je bodem spojitosti f. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \colon |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

(b) Nechť $x_0 \in J$ je bodem spojitosti f. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\colon |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Pak pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ platí

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right|$$

(b) Nechť $x_0 \in J$ je bodem spojitosti f. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\colon |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Pak pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ platí

$$\Big|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\Big| = \Big|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - f(x_0)\Big|.$$

(b) Nechť $x_0 \in J$ je bodem spojitosti f. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\colon |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Pak pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ platí

$$\Big|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\Big| = \Big|\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - f(x_0)\Big|.$$

Platí $\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t = f(x_0) \cdot (x - x_0)$ pro každé $x \in P(x_0, \delta)$.

Pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ pak platí

$$\Big|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\Big| = \Big|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t\Big|$$

Pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ pak platí

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t\right|$$

$$= \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t\right|$$

Pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ pak platí

$$\Big|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\Big| = \Big|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$= \frac{1}{|x - x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\leq \frac{1}{|x - x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t\Big|$$

Pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ pak platí

$$\Big|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\Big| = \Big|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$= \frac{1}{|x - x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\le \frac{1}{|x - x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\le \frac{1}{|x - x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} \varepsilon\,\mathrm{d}t\Big|$$

Pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ pak platí

$$\Big|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\Big| = \Big|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$= \frac{1}{|x-x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} (f(t)-f(x_0))\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\leq \frac{1}{|x-x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} |f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\leq \frac{1}{|x-x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} \varepsilon\,\mathrm{d}t\Big| = \varepsilon.$$

Pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ pak platí

$$\Big|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\Big| = \Big|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$= \frac{1}{|x - x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\leq \frac{1}{|x - x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\leq \frac{1}{|x - x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} \varepsilon\,\mathrm{d}t\Big| = \varepsilon.$$

Výraz $\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t$ z předchozí série nerovností je u veden v absolutní hodnotě,

Pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ pak platí

$$\Big|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\Big| = \Big|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$= \frac{1}{|x-x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x}(f(t)-f(x_0))\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\leq \frac{1}{|x-x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x}|f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\leq \frac{1}{|x-x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x}\varepsilon\,\mathrm{d}t\Big| = \varepsilon.$$

Výraz $\int_{x_0}^{x}|f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t$ z předchozí série nerovností je u veden v absolutní hodnotě, protože pro $x < x_0$ je záporný.

Pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ pak platí

$$\Big|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\Big| = \Big|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$= \frac{1}{|x - x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\le \frac{1}{|x - x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\le \frac{1}{|x - x_0|}\Big|\int_{x_0}^{x} \varepsilon\,\mathrm{d}t\Big| = \varepsilon.$$

Výraz $\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t$ z předchozí série nerovností je u veden v absolutní hodnotě, protože pro $x < x_0$ je záporný. Tedy $F'(x_0) = f(x_0)$ a tvrzení je dokázáno. $\square$

Důsledek 9.14

(a) *Nechť* $a, b \in \mathbf{R}^\star$, *a* $a < b$, *a* f *je spojitá funkce na intervalu* (a, b). *Potom* f *má na* (a, b) *primitivní funkci.*

Důsledek 9.14

(a) *Nechť* $a, b \in \mathbf{R}^\star$, *a* $a < b$, *a* f *je spojitá funkce na intervalu* (a, b). *Potom* f *má na* (a, b) *primitivní funkci.*

(b) *Nechť* $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ *a* f *je spojitá funkce na intervalu* $[a, b]$ *a* F *je primitivní funkce k funkci* f *na* (a, b).

Důsledek 9.14

(a) *Nechť* $a, b \in \mathbf{R}^\star$, *$a < b$, a f je spojitá funkce na intervalu* (a, b). *Potom f má na* (a, b) *primitivní funkci.*

(b) *Nechť* $a, b \in \mathbf{R}$, *$a < b$ a f je spojitá funkce na intervalu* $[a, b]$ *a F je primitivní funkce k funkci f na* (a, b). *Potom existují vlastní limity* $\lim_{x \to a_+} F(x)$ *a* $\lim_{x \to b_-} F(x)$ *a platí*

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

Důsledek 9.14

(a) *Nechť* $a, b \in \mathbf{R}^\star$*,* $a < b$*, a* f *je spojitá funkce na intervalu* (a, b)*. Potom* f *má na* (a, b) *primitivní funkci.*

(b) *Nechť* $a, b \in \mathbf{R}$*,* $a < b$ *a* f *je spojitá funkce na intervalu* $[a, b]$ *a* F *je primitivní funkce k funkci* f *na* (a, b)*. Potom existují vlastní limity* $\lim_{x \to a_+} F(x)$ *a* $\lim_{x \to b_-} F(x)$ *a platí*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x).$$

Důkaz Důsledku 9.14

(a) Zvolme $c \in (a, b)$ a položme

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in (a, b).$$

Důkaz Důsledku 9.14

(a) Zvolme $c \in (a, b)$ a položme

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt, \quad x \in (a, b).$$

Podle věty o vztahu spojitosti a riemannovské integrovatelnosti (Věta 9.7) je funkce f riemannovsky integrovatelná na každém intervalu $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$,

Důkaz Důsledku 9.14

(a) Zvolme $c \in (a, b)$ a položme

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt, \quad x \in (a, b).$$

Podle věty o vztahu spojitosti a riemannovské integrovatelnosti (Věta 9.7) je funkce f riemannovsky integrovatelná na každém intervalu $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, a proto je F dobře definovaná funkce.

Důkaz Důsledku 9.14

(a) Zvolme $c \in (a, b)$ a položme

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in (a, b).$$

Podle věty o vztahu spojitosti a riemannovské integrovatelnosti (Věta 9.7) je funkce f riemannovsky integrovatelná na každém intervalu $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, a proto je F dobře definovaná funkce. Věta 9.13 pak zaručuje platnost vztahu $F' = f$ na (a, b), tj. F je primitivní k f.

(b) Definujme funkci

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(a), & t \in (a-1, a], \\ & \\ & \end{cases}$$

(b) Definujme funkci

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(a), & t \in (a-1, a], \\ f(t), & t \in (a, b), \\ & \end{cases}$$

(b) Definujme funkci

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(a), & t \in (a-1, a], \\ f(t), & t \in (a, b), \\ f(b), & t \in [b, b+1). \end{cases}$$

(b) Definujme funkci

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(a), & t \in (a-1, a], \\ f(t), & t \in (a, b), \\ f(b), & t \in [b, b+1). \end{cases}$$

Pak je $\tilde{f}$ spojitá na $(a-1, b+1)$.

(b) Definujme funkci

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(a), & t \in (a-1, a], \\ f(t), & t \in (a, b), \\ f(b), & t \in [b, b+1). \end{cases}$$

Pak je $\tilde{f}$ spojitá na $(a-1, b+1)$. Položme

$$\tilde{F}(x) = \int_a^x \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in (a-1, b+1).$$

Pak je $\tilde{F}$ primitivní funkce k $\tilde{f}$ na $(a-1, b+1)$, Pak je $\tilde{F}$ primitivní funkce k $\tilde{f}$ na $(a - 1, b + 1)$, a tedy je na tomto intervalu spojitá.

Pak je $\tilde{F}$ primitivní funkce k $\tilde{f}$ na $(a - 1, b + 1)$, a tedy je na tomto intervalu spojitá. Protože je $\tilde{F}|_{(a,b)}$ primitivní funkce k funkci f,

Pak je $\tilde{F}$ primitivní funkce k $\tilde{f}$ na $(a-1, b+1)$, a tedy je na tomto intervalu spojitá. Protože je $\tilde{F}|_{(a,b)}$ primitivní funkce k funkci f, existuje podle Věty 8.1 $c \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall x \in (a, b)\colon\ F(x) = \tilde{F}(x) + c.$$

Pak je $\tilde{F}$ primitivní funkce k $\tilde{f}$ na $(a-1, b+1)$, a tedy je na tomto intervalu spojitá. Protože je $\tilde{F}|_{(a,b)}$ primitivní funkce k funkci f, existuje podle Věty 8.1 $c \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall x \in (a,b)\colon\ F(x) = \tilde{F}(x) + c.$$

Tedy

$$\lim_{x \to a_+} F(x) = \tilde{F}(a) + c \quad \text{a} \quad \lim_{x \to b_-} F(x) = \tilde{F}(b) + c.$$

Pak je $\tilde{F}$ primitivní funkce k $\tilde{f}$ na $(a-1, b+1)$, a tedy je na tomto intervalu spojitá. Protože je $\tilde{F}|_{(a,b)}$ primitivní funkce k funkci f, existuje podle Věty 8.1 $c \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall x \in (a, b)\colon\ F(x) = \tilde{F}(x) + c.$$

Tedy

$$\lim_{x \to a_+} F(x) = \tilde{F}(a) + c \quad \text{a} \quad \lim_{x \to b_-} F(x) = \tilde{F}(b) + c.$$

Pak tedy

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Pak je $\tilde{F}$ primitivní funkce k $\tilde{f}$ na $(a-1, b+1)$, a tedy je na tomto intervalu spojitá. Protože je $\tilde{F}|_{(a,b)}$ primitivní funkce k funkci f, existuje podle Věty 8.1 $c \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall x \in (a, b)\colon\ F(x) = \tilde{F}(x) + c.$$

Tedy

$$\lim_{x \to a_+} F(x) = \tilde{F}(a) + c \quad \text{a} \quad \lim_{x \to b_-} F(x) = \tilde{F}(b) + c.$$

Pak tedy

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t$$

Pak je $\tilde{F}$ primitivní funkce k $\tilde{f}$ na $(a-1, b+1)$, a tedy je na tomto intervalu spojitá. Protože je $\tilde{F}|_{(a,b)}$ primitivní funkce k funkci f, existuje podle Věty 8.1 $c \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall x \in (a,b)\colon F(x) = \tilde{F}(x) + c.$$

Tedy

$$\lim_{x \to a_+} F(x) = \tilde{F}(a) + c \quad \text{a} \quad \lim_{x \to b_-} F(x) = \tilde{F}(b) + c.$$

Pak tedy

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t = \tilde{F}(b)$$

Pak je $\tilde{F}$ primitivní funkce k $\tilde{f}$ na $(a-1, b+1)$, a tedy je na tomto intervalu spojitá. Protože je $\tilde{F}|_{(a,b)}$ primitivní funkce k funkci f, existuje podle Věty 8.1 $c \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall x \in (a, b)\colon\ F(x) = \tilde{F}(x) + c.$$

Tedy

$$\lim_{x \to a_+} F(x) = \tilde{F}(a) + c \quad \text{a} \quad \lim_{x \to b_-} F(x) = \tilde{F}(b) + c.$$

Pak tedy

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t = \tilde{F}(b) = \lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x),$$

neboť $\tilde{F}(a) = 0$.

Pak je $\tilde{F}$ primitivní funkce k $\tilde{f}$ na $(a-1, b+1)$, a tedy je na tomto intervalu spojitá. Protože je $\tilde{F}|_{(a,b)}$ primitivní funkce k funkci f, existuje podle Věty 8.1 $c \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\forall x \in (a,b)\colon\ F(x) = \tilde{F}(x) + c.$$

Tedy

$$\lim_{x\to a_+} F(x) = \tilde{F}(a) + c \quad \text{a} \quad \lim_{x\to b_-} F(x) = \tilde{F}(b) + c.$$

Pak tedy

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t = \tilde{F}(b) = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x),$$

neboť $\tilde{F}(a) = 0$. Tím je důkaz dokončen. $\square$