15. přednáška, 8. 4. 2020

Příklad

Spočtěte $\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x$.

Řešení

Pro $n \in \mathbf{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \left\{\frac{j}{n}\right\}_{j=0}^{n}$ intervalu $[0, 1]$.

Řešení

Pro $n \in \mathbf{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \{\frac{j}{n}\}_{j=0}^{n}$ intervalu $[0, 1]$. Pak $\lim \nu(D_n) = \lim \frac{1}{n} = 0$ a platí

$\underline{S}(f, D_n)$

Řešení

Pro $n \in \mathbf{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \left\{\frac{j}{n}\right\}_{j=0}^{n}$ intervalu $[0,1]$. Pak $\lim \nu(D_n) = \lim \frac{1}{n} = 0$ a platí

$$\underline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n}$$

Řešení

Pro $n \in \mathbf{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \{\frac{j}{n}\}_{j=0}^{n}$ intervalu $[0,1]$. Pak $\lim \nu(D_n) = \lim \frac{1}{n} = 0$ a platí

$$\underline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2$$

Řešení

Pro $n \in \mathbf{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \left\{\frac{j}{n}\right\}_{j=0}^{n}$ intervalu $[0,1]$. Pak $\lim \nu(D_n) = \lim \frac{1}{n} = 0$ a platí

$$\underline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{1}{6n^3}(n-1)n(2n-1),$$

Řešení

Pro $n \in \mathbf{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \left\{\frac{j}{n}\right\}_{j=0}^{n}$ intervalu $[0,1]$. Pak $\lim \nu(D_n) = \lim \frac{1}{n} = 0$ a platí

$$\underline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{1}{6n^3}(n-1)n(2n-1),$$

$$\overline{S}(f, D_n)$$

Řešení

Pro $n \in \mathbf{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \left\{\frac{j}{n}\right\}_{j=0}^{n}$ intervalu $[0,1]$. Pak $\lim \nu(D_n) = \lim \frac{1}{n} = 0$ a platí

$$\underline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{1}{6n^3}(n-1)n(2n-1),$$

$$\overline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{n}\right)^2 \frac{1}{n}$$

Řešení

Pro $n \in \mathbf{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \{\frac{j}{n}\}_{j=0}^{n}$ intervalu $[0,1]$. Pak $\lim \nu(D_n) = \lim \frac{1}{n} = 0$ a platí

$$\underline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{j-1}{n}\Big)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{1}{6n^3}(n-1)n(2n-1),$$

$$\overline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \big(\frac{j}{n}\big)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2$$

Řešení

Pro $n \in \mathbf{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \{\frac{j}{n}\}_{j=0}^{n}$ intervalu $[0,1]$. Pak $\lim \nu(D_n) = \lim \frac{1}{n} = 0$ a platí

$$\underline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{1}{6n^3}(n-1)n(2n-1),$$

$$\overline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6n^3} n(n+1)(2n+1).$$

Tedy

$$\lim \underline{S}(f, D_n) = \lim \overline{S}(f, D_n) = \frac{1}{3}.$$

Řešení

Pro $n \in \mathbf{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \left\{\frac{j}{n}\right\}_{j=0}^{n}$ intervalu $[0,1]$. Pak $\lim \nu(D_n) = \lim \frac{1}{n} = 0$ a platí

$$\underline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{1}{6n^3}(n-1)n(2n-1),$$

$$\overline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6n^3} n(n+1)(2n+1).$$

Tedy

$$\lim \underline{S}(f, D_n) = \lim \overline{S}(f, D_n) = \frac{1}{3}.$$

Pak máme $f \in \mathcal{R}([0,1])$ a $\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.

Věta 9.5 (kritérium existence Riemannova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* f *je omezená funkce na* $[a, b]$.

Věta 9.5 (kritérium existence Riemannova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$*,* $a < b$*, a* f *je omezená funkce na* $[a, b]$*. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

(i) $f \in \mathcal{R}([a, b])$,

Věta 9.5 (kritérium existence Riemannova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, *$a < b$, a f je omezená funkce na* $[a, b]$*.* *Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

(i) $f \in \mathcal{R}([a, b])$,

(ii) *pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje dělení D intervalu* $[a, b]$ *takové, že*

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii)

(i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Zvolme $\varepsilon > 0$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existují dělení D_1, D_2 intervalu $[a,b]$ taková, že

$$\overline{S}(f, D_1) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \underline{S}(f, D_2) > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existují dělení D_1, D_2 intervalu $[a,b]$ taková, že

$$\overline{S}(f, D_1) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \underline{S}(f, D_2) > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nechť D je dělení intervalu $[a,b]$ zjemňující D_1 i D_2.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existují dělení D_1, D_2 intervalu $[a, b]$ taková, že

$$\overline{S}(f, D_1) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \underline{S}(f, D_2) > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nechť D je dělení intervalu $[a, b]$ zjemňující D_1 i D_2. Pak dostaneme díky Lemmatu 9.1 nerovnosti

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D_1) - \underline{S}(f, D_2)$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existují dělení D_1, D_2 intervalu $[a,b]$ taková, že

$$\overline{S}(f, D_1) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \underline{S}(f, D_2) > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nechť D je dělení intervalu $[a,b]$ zjemňující D_1 i D_2. Pak dostaneme díky Lemmatu 9.1 nerovnosti

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D_1) - \underline{S}(f, D_2)$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existují dělení D_1, D_2 intervalu $[a, b]$ taková, že

$$\overline{S}(f, D_1) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \underline{S}(f, D_2) > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nechť D je dělení intervalu $[a, b]$ zjemňující D_1 i D_2. Pak dostaneme díky Lemmatu 9.1 nerovnosti

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D_1) - \underline{S}(f, D_2)$$

$$\leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existují dělení D_1, D_2 intervalu $[a,b]$ taková, že

$$\overline{S}(f, D_1) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \underline{S}(f, D_2) > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nechť D je dělení intervalu $[a,b]$ zjemňující D_1 i D_2. Pak dostaneme díky Lemmatu 9.1 nerovnosti

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D_1) - \underline{S}(f, D_2)$$

$$\leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existují dělení D_1, D_2 intervalu $[a, b]$ taková, že

$$\overline{S}(f, D_1) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \underline{S}(f, D_2) > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nechť D je dělení intervalu $[a, b]$ zjemňující D_1 i D_2. Pak dostaneme díky Lemmatu 9.1 nerovnosti

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D_1) - \underline{S}(f, D_2)$$

$$\leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tedy (ii) platí.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

(ii) $\Rightarrow$ (i) Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné. K němu nalezneme dělení D intervalu $[a, b]$ takové, že $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné. K němu nalezneme dělení D intervalu $[a, b]$ takové, že $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$. Pak ale máme

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné. K němu nalezneme dělení D intervalu $[a, b]$ takové, že $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$. Pak ale máme

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Tedy $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ a $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Definice

Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je interval a f je funkce definovaná alespoň na I.

Definice

Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je interval a f je funkce definovaná alespoň na I. Řekneme, že f je **stejnoměrně spojitá** na I, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\ \forall x, y \in I:$$
$$(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Poznámka

stejnoměrná spojitost na I

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in I \ \forall y \in I\colon \left(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\right).$$

Poznámka

stejnoměrná spojitost na I

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ \forall y \in I\colon\ (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon).$$

spojitost na I

$$\forall x \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in I\colon\ (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon).$$

Poznámka

stejnoměrná spojitost na I

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ \forall y \in I\colon (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

spojitost na I

$$\forall x \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in I\colon (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Poznámka

stejnoměrná spojitost na I

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

spojitost na I

$$\forall x \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Je-li funkce f na intervalu I stejnoměrně spojitá, pak je na I spojitá.

Poznámka

stejnoměrná spojitost na I

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in I \; \forall y \in I \colon \; (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

spojitost na I

$$\forall x \in I \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall y \in I \colon \; (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Je-li funkce f na intervalu I stejnoměrně spojitá, pak je na I spojitá.
Nechť $x_0 \in I$.

Poznámka

stejnoměrná spojitost na I

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

spojitost na I

$$\forall x \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Je-li funkce f na intervalu I stejnoměrně spojitá, pak je na I spojitá.
Nechť $x_0 \in I$. Zvolme $\varepsilon > 0$.

Poznámka

stejnoměrná spojitost na I

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in I \; \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

spojitost na I

$$\forall x \in I \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Je-li funkce f na intervalu I stejnoměrně spojitá, pak je na I spojitá.
Nechť $x_0 \in I$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ z definice stejnoměrné spojitosti pro ε.

Poznámka

stejnoměrná spojitost na I

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

spojitost na I

$$\forall x \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Je-li funkce f na intervalu I stejnoměrně spojitá, pak je na I spojitá.
Nechť $x_0 \in I$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ z definice stejnoměrné spojitosti pro ε. Tedy jsou-li $x, y \in I$ body splňující $|x - y| < \delta$, je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Poznámka

stejnoměrná spojitost na I

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

spojitost na I

$$\forall x \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in I\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Je-li funkce f na intervalu I stejnoměrně spojitá, pak je na I spojitá.
Nechť $x_0 \in I$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ z definice stejnoměrné spojitosti pro ε. Tedy jsou-li $x, y \in I$ body splňující $|x - y| < \delta$, je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Je-li nyní $y \in I$, $|x_0 - y| < \delta$, je $|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Poznámka

stejnoměrná spojitost na I

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in I\ \forall y \in I \colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

spojitost na I

$$\forall x \in I\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall y \in I \colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Je-li funkce f na intervalu I stejnoměrně spojitá, pak je na I spojitá.
Nechť $x_0 \in I$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ z definice stejnoměrné spojitosti pro ε. Tedy jsou-li $x, y \in I$ body splňující $|x - y| < \delta$, je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Je-li nyní $y \in I$, $|x_0 - y| < \delta$, je $|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$. Funkce f je proto spojitá v bodě x_0, respektive je spojitá zleva či zprava v x_0 v závislosti na poloze x_0 v I.

Příklad

Nechť $I = (0, 1)$ a $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in I$. Pak je f spojitá na I, ale není stejnoměrně spojitá na I.

Řešení

Pro $n \in \mathbf{N}$ položme $x_n = \frac{1}{n}$ a $y_n = \frac{1}{n+1}$.

Řešení

Pro $n \in \mathbf{N}$ položme $x_n = \frac{1}{n}$ a $y_n = \frac{1}{n+1}$. Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ a $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$.

Řešení

Pro $n \in \mathbf{N}$ položme $x_n = \frac{1}{n}$ a $y_n = \frac{1}{n+1}$. Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ a $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$. Pro $\varepsilon \in (0, 1)$ tedy nenalezneme $\delta > 0$ požadované v definici stejnoměrné spojitosti.

Věta 9.6

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$*,* $a < b$*, a* f *je spojitá funkce na* $[a, b]$*.*
Potom f *je stejnoměrně spojitá na* $[a, b]$*.*

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$.

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$\exists \varepsilon > 0$

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0$

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x, y \in [a, b]:$

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x, y \in [a, b] \colon (|x - y| < \delta)$$

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x, y \in [a, b] \colon (|x - y| < \delta) \wedge (|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x, y \in [a, b] \colon (|x - y| < \delta) \wedge (|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Mějme tedy kladné $\varepsilon \in \mathbf{R}$ z tohoto výroku.

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in [a, b] \colon (|x - y| < \delta) \wedge (|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Mějme tedy kladné $\varepsilon \in \mathbf{R}$ z tohoto výroku. Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ existují $x_n, y_n \in [a, b]$ taková, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall \delta > 0 \, \exists x, y \in [a, b] \colon (|x - y| < \delta) \wedge (|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Mějme tedy kladné $\varepsilon \in \mathbf{R}$ z tohoto výroku. Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ existují $x_n, y_n \in [a, b]$ taková, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x, y \in [a, b]: (|x - y| < \delta) \wedge (|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Mějme tedy kladné $\varepsilon \in \mathbf{R}$ z tohoto výroku. Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ existují $x_n, y_n \in [a, b]$ taková, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, a proto z ní lze díky Bolzanově-Weierstrassově větě (Věta 2.15) vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergující k bodu $x \in \mathbf{R}$.

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x, y \in [a, b] \colon (|x - y| < \delta) \wedge (|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Mějme tedy kladné $\varepsilon \in \mathbf{R}$ z tohoto výroku. Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ existují $x_n, y_n \in [a, b]$ taková, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, a proto z ní lze díky Bolzanově-Weierstrassově větě (Věta 2.15) vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergující k bodu $x \in \mathbf{R}$. Ten je pak obsažen v $[a, b]$.

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x, y \in [a, b] \colon (|x - y| < \delta) \wedge (|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Mějme tedy kladné $\varepsilon \in \mathbf{R}$ z tohoto výroku. Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ existují $x_n, y_n \in [a, b]$ taková, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, a proto z ní lze díky Bolzanově-Weierstrassově větě (Věta 2.15) vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergující k bodu $x \in \mathbf{R}$. Ten je pak obsažen v $[a, b]$. Protože

$$|x - y_{n_k}|$$

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in [a, b] \colon (|x - y| < \delta) \wedge (|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Mějme tedy kladné $\varepsilon \in \mathbf{R}$ z tohoto výroku. Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ existují $x_n, y_n \in [a, b]$ taková, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, a proto z ní lze díky Bolzanově-Weierstrassově větě (Věta 2.15) vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergující k bodu $x \in \mathbf{R}$. Ten je pak obsažen v $[a, b]$. Protože

$$|x - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}|$$

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x, y \in [a, b] \colon (|x - y| < \delta) \wedge (|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Mějme tedy kladné $\varepsilon \in \mathbf{R}$ z tohoto výroku. Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ existují $x_n, y_n \in [a, b]$ taková, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, a proto z ní lze díky Bolzanově-Weierstrassově větě (Věta 2.15) vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergující k bodu $x \in \mathbf{R}$. Ten je pak obsažen v $[a, b]$. Protože

$$|x - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + \frac{1}{n_k},$$

konverguje i posloupnost $\{y_{n_k}\}$ k x.

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in [a, b] \colon (|x - y| < \delta) \wedge (|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Mějme tedy kladné $\varepsilon \in \mathbf{R}$ z tohoto výroku. Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ existují $x_n, y_n \in [a, b]$ taková, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, a proto z ní lze díky Bolzanově-Weierstrassově větě (Věta 2.15) vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergující k bodu $x \in \mathbf{R}$. Ten je pak obsažen v $[a, b]$. Protože

$$|x - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + \frac{1}{n_k},$$

konverguje i posloupnost $\{y_{n_k}\}$ k x.

Důkaz Věty 9.6

Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Potom platí

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in [a, b] \colon (|x - y| < \delta) \wedge (|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon).$$

Mějme tedy kladné $\varepsilon \in \mathbf{R}$ z tohoto výroku. Pak pro každé $n \in \mathbf{N}$ existují $x_n, y_n \in [a, b]$ taková, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, a proto z ní lze díky Bolzanově-Weierstrassově větě (Věta 2.15) vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergující k bodu $x \in \mathbf{R}$. Ten je pak obsažen v $[a, b]$. Protože

$$|x - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + \frac{1}{n_k},$$

konverguje i posloupnost $\{y_{n_k}\}$ k x.

Podle Heineovy věty platí

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}).$$

Podle Heineovy věty platí

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}).$$

Platí

$$0 \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(x) - f(y_{n_k})|$$

pro každé $k \in \mathbf{N}$.

Podle Heineovy věty platí

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}).$$

Platí

$$0 \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(x) - f(y_{n_k})|$$

pro každé $k \in \mathbf{N}$. Pravá strana nerovnosti konverguje k nule, a tedy

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 0.$$

Podle Heineovy věty platí

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}).$$

Platí

$$0 \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(x) - f(y_{n_k})|$$

pro každé $k \in \mathbf{N}$. Pravá strana nerovnosti konverguje k nule, a tedy

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 0.$$

Ale $\varepsilon \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})|$ pro každé $k \in \mathbf{N}$, což je spor.

Věta 9.7

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* f *je spojitá funkce na* $[a, b]$. *Potom* $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Důkaz věty 9.7

Nechť $\varepsilon > 0$.

Důkaz věty 9.7

Nechť $\varepsilon > 0$. Funkce f je omezená na $[a, b]$ (Věta 3.12) a stejnoměrně spojitá (Věta 9.6).

Důkaz věty 9.7

Nechť $\varepsilon > 0$. Funkce f je omezená na $[a, b]$ (Věta 3.12) a stejnoměrně spojitá (Věta 9.6). Nalezneme $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x, y \in [a, b]\colon (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Důkaz věty 9.7

Nechť $\varepsilon > 0$. Funkce f je omezená na $[a,b]$ (Věta 3.12) a stejnoměrně spojitá (Věta 9.6). Nalezneme $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x, y \in [a,b] \colon (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Zvolme nyní dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ intervalu $[a,b]$ takové, že $\nu(D) < \delta$.

Pak pro $i \in \{1, \ldots, n\}$ máme díky stejnoměrné spojitosti

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \leq \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f + \varepsilon,$$

Pak pro $i \in \{1, \dots, n\}$ máme díky stejnoměrné spojitosti

$$\sup_{[x_{i-1},x_i]} f \leq \inf_{[x_{i-1},x_i]} f + \varepsilon,$$

a tedy

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \Big) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Pak pro $i \in \{1, \dots, n\}$ máme díky stejnoměrné spojitosti

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \leq \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f + \varepsilon,$$

a tedy

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \Big) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon (x_i - x_{i-1})$$

Pak pro $i \in \{1, \dots, n\}$ máme díky stejnoměrné spojitosti

$$\sup_{[x_{i-1},x_i]} f \leq \inf_{[x_{i-1},x_i]} f + \varepsilon,$$

a tedy

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \Big) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon (b - a).$$

Pak pro $i \in \{1, \dots, n\}$ máme díky stejnoměrné spojitosti

$$\sup_{[x_{i-1},x_i]} f \leq \inf_{[x_{i-1},x_i]} f + \varepsilon,$$

a tedy

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \Bigl(\sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \Bigr) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon (b - a).$$

Věta 9.5 tedy říká, že f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$.