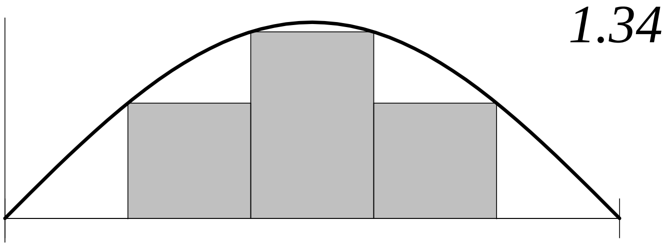
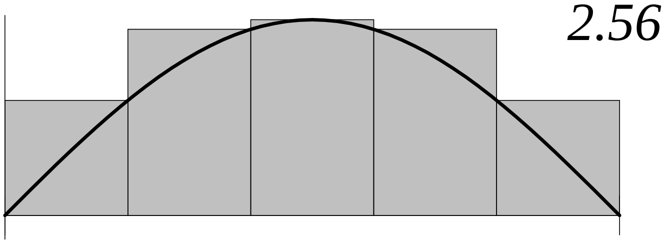
13. přednáška, 1. 4. 2020

9. Určitý integrál

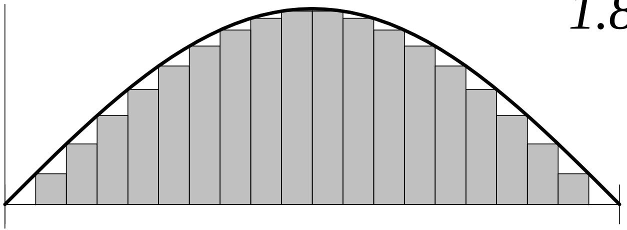
$f(x) = \sin x$ na $[0, \pi]$



$f(x) = \sin x$ na $[0, \pi]$

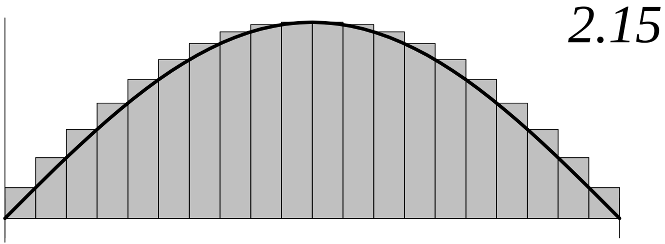


$f(x) = \sin x$ na $[0, \pi]$

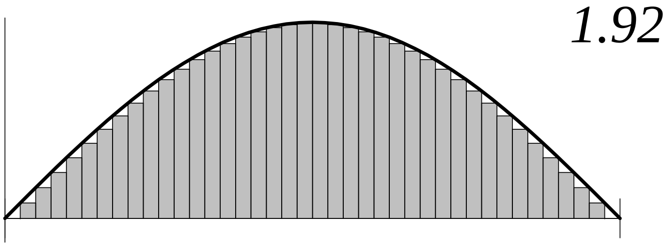


1.84

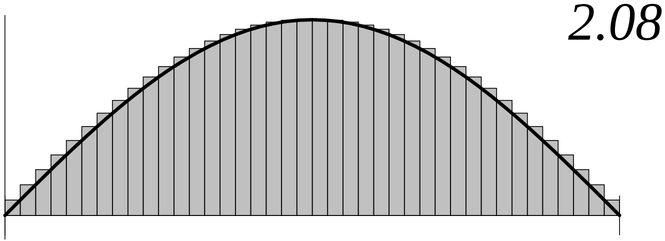
$f(x) = \sin x$ na $[0, \pi]$



$f(x) = \sin x$ na $[0, \pi]$



$f(x) = \sin x$ na $[0, \pi]$



Definice

Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ nazýváme **dělením intervalu** $[a, b]$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Definice

Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ nazýváme **dělením intervalu** $[a, b]$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Body $x_0, \ldots, x_n$ nazýváme **dělícími body**.

Definice

Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ nazýváme **dělením intervalu** $[a, b]$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Body $x_0, \ldots, x_n$ nazýváme **dělícími body**. **Normou dělení** $D = \{x_j\}_{j=0}^{n}$ rozumíme číslo

$$\nu(D) = \max\big\{x_j - x_{j-1};\ j \in \{1, \ldots, n\}\big\}.$$

Definice

Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme **dělením intervalu** $[a, b]$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Body $x_0, \dots, x_n$ nazýváme **dělícími body**. **Normou dělení** $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ rozumíme číslo

$$\nu(D) = \max\bigl\{x_j - x_{j-1};\, j \in \{1, \dots, n\}\bigr\}.$$

Řekneme, že dělení D' intervalu $[a, b]$ je **zjemněním dělení** D intervalu $[a, b]$, jestliže každý dělící bod D je i dělícím bodem D'.

Definice

Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a, b]$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^{n}$ je dělení $[a, b]$.

Definice

Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a, b]$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a, b]$. Označme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } M_j = \sup\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } m_j = \inf\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

Definice

Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a, b]$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a, b]$. Označme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } M_j = \sup\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } m_j = \inf\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf\{\overline{S}(f, D);\ D \text{ je dělením intervalu } [a, b]\},$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup\{\underline{S}(f, D);\ D \text{ je dělením intervalu } [a, b]\}.$$

Definice

- Řekneme, že omezená funkce f na intervalu $[a, b]$, $a < b$, má **Riemannův integrál od** a **do** b, pokud $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Definice

- Řekneme, že omezená funkce f na intervalu $[a, b]$, $a < b$, má **Riemannův integrál od** a **do** b, pokud $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Hodnota integrálu f od a do b je rovna této společné hodnotě.

Definice

- Řekneme, že omezená funkce f na intervalu $[a, b]$, $a < b$, má **Riemannův integrál od** a **do** b, pokud $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Hodnota integrálu f od a do b je rovna této společné hodnotě. Značíme ji $\int_a^b f(x)\,dx$.

Definice

- Řekneme, že omezená funkce f na intervalu $[a, b]$, $a < b$, má **Riemannův integrál od** a **do** b, pokud $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Hodnota integrálu f od a do b je rovna této společné hodnotě. Značíme ji $\int_a^b f(x)\,dx$.
- Pokud $a > b$, definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, v případě, že $a = b$, definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

(a) Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a < b$. Potom $\int_a^b c \,\mathrm{d}x = c(b-a)$.

(a) Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a < b$. Potom $\int_a^b c \, \mathrm{d}x = c(b - a)$.

(b) Nechť D je Dirichletova funkce.

(a) Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a < b$. Potom $\int_a^b c \,\mathrm{d}x = c(b - a)$.

(b) Nechť D je Dirichletova funkce.

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

(a) Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a < b$. Potom $\int_a^b c \,\mathrm{d}x = c(b - a)$.

(b) Nechť D je Dirichletova funkce.

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Potom $\underline{\int_0^1} D(x) \,\mathrm{d}x = 0$ a $\overline{\int_0^1} D(x) \,\mathrm{d}x = 1$.

(a) Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a < b$. Potom $\int_a^b c \, \mathrm{d}x = c(b-a)$.

(b) Nechť D je Dirichletova funkce.

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Potom $\underline{\int_0^1} D(x) \, \mathrm{d}x = 0$ a $\overline{\int_0^1} D(x) \, \mathrm{d}x = 1$. Riemannův integrál funkce D tedy neexistuje.

(a) Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a < b$. Potom $\int_a^b c \,\mathrm{d}x = c(b - a)$.

(b) Nechť D je Dirichletova funkce.

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Potom $\underline{\int_0^1} D(x) \,\mathrm{d}x = 0$ a $\overline{\int_0^1} D(x) \,\mathrm{d}x = 1$. Riemannův integrál funkce D tedy neexistuje.

(c) Platí $\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ (odvodíme později).

Definice

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$. Množinu všech funkcí, které mají Riemannův integrál od a do b, značíme $\mathcal{R}([a, b])$.

Poznámka

Nechť $M_1, M_2 \subset \mathbf{R}$, $M_1 \subset M_2$. Nechť f je funkce definovaná alespoň na M_2. Potom platí

$$\sup_{M_1} f \leq \sup_{M_2} f \quad \text{a} \quad \inf_{M_1} f \geq \inf_{M_2} f.$$

Lemma 9.1

Nechť f je omezená funkce na intervalu $[a, b]$.

(a) *Nechť D, D' jsou dělení $[a, b]$ a D' zjemňuje D. Pak platí*

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D)$$

Lemma 9.1

Nechť f je omezená funkce na intervalu $[a, b]$.

(a) *Nechť D, D' jsou dělení $[a, b]$ a D' zjemňuje D. Pak platí*

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D)$$

(b) *Nechť D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a, b]$. Pak platí*

$$\underline{S}(f, D_1) \leq \overline{S}(f, D_2).$$

Lemma 9.1

Nechť f je omezená funkce na intervalu $[a, b]$.

(a) *Nechť D, D' jsou dělení $[a, b]$ a D' zjemňuje D. Pak platí*

$$\underline{S}(f, D) \le \underline{S}(f, D') \le \overline{S}(f, D') \le \overline{S}(f, D)$$

(b) *Nechť D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a, b]$. Pak platí*

$$\underline{S}(f, D_1) \le \overline{S}(f, D_2).$$

(c) *Platí* $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Důkaz (a)

Druhá nerovnost zřejmě platí z definice.

Důkaz (a)

Druhá nerovnost zřejmě platí z definice. Dokažme tedy první.

Důkaz (a)

Druhá nerovnost zřejmě platí z definice. Dokažme tedy první. Předpokládáme-li, že $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ a D' obsahuje oproti D právě jeden bod navíc,

Důkaz (a)

Druhá nerovnost zřejmě platí z definice. Dokažme tedy první. Předpokládáme-li, že $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ a D' obsahuje oproti D právě jeden bod navíc, řekněme z ležící mezi body x_{j-1} a x_j pro nějaké $j \in \{1, \ldots, n\}$,

Důkaz (a)

Druhá nerovnost zřejmě platí z definice. Dokažme tedy první. Předpokládáme-li, že $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ a D' obsahuje oproti D právě jeden bod navíc, řekněme z ležící mezi body x_{j-1} a x_j pro nějaké $j \in \{1, \dots, n\}$, pak platí

$$\underline{S}(f, D') - \underline{S}(f, D) = \Big(\inf_{[x_{j-1},z]} f\Big)(z - x_{j-1}) + \Big(\inf_{[z,x_j]} f\Big)(x_j - z) - \Big(\inf_{[x_{j-1},x_j]} f\Big)(x_j - x_{j-1}).$$

Důkaz (a)

Druhá nerovnost zřejmě platí z definice. Dokažme tedy první. Předpokládáme-li, že $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ a D' obsahuje oproti D právě jeden bod navíc, řekněme z ležící mezi body x_{j-1} a x_j pro nějaké $j \in \{1, \dots, n\}$, pak platí

$$\underline{S}(f, D') - \underline{S}(f, D) = \Big(\inf_{[x_{j-1},z]} f\Big)(z - x_{j-1}) + \Big(\inf_{[z,x_j]} f\Big)(x_j - z) - \Big(\inf_{[x_{j-1},x_j]} f\Big)(x_j - x_{j-1}).$$

Důkaz (a) - pokračování

Protože

$$\inf_{[x_{j-1},z]} f \geq \inf_{[x_{j-1},x_j]} f \quad \text{a} \quad \inf_{[z,x_j]} f \geq \inf_{[x_{j-1},x_j]} f,$$

Důkaz (a) - pokračování

Protože

$$\inf_{[x_{j-1},z]} f \geq \inf_{[x_{j-1},x_j]} f \quad \text{a} \quad \inf_{[z,x_j]} f \geq \inf_{[x_{j-1},x_j]} f,$$

dostáváme

$$\underline{S}(f,D') - \underline{S}(f,D) \geq \left(\inf_{[x_{j-1},x_j]} f \right) (z - x_{j-1} + x_j - z - x_j + x_{j-1}) = 0.$$

Důkaz (a) - pokračování

Protože

$$\inf_{[x_{j-1},z]} f \geq \inf_{[x_{j-1},x_j]} f \quad \text{a} \quad \inf_{[z,x_j]} f \geq \inf_{[x_{j-1},x_j]} f,$$

dostáváme

$$\underline{S}(f,D') - \underline{S}(f,D) \geq \left(\inf_{[x_{j-1},x_j]} f\right)(z - x_{j-1} + x_j - z - x_j + x_{j-1}) = 0.$$

Tím je důkaz prvé nerovnosti proveden pro případ, kdy D' obsahuje oproti D jeden dělící bod navíc.

Důkaz (a) - pokračování

Protože

$$\inf_{[x_{j-1},z]} f \geq \inf_{[x_{j-1},x_j]} f \quad \text{a} \quad \inf_{[z,x_j]} f \geq \inf_{[x_{j-1},x_j]} f,$$

dostáváme

$$\underline{S}(f,D') - \underline{S}(f,D) \geq \left(\inf_{[x_{j-1},x_j]} f\right)(z - x_{j-1} + x_j - z - x_j + x_{j-1}) = 0.$$

Tím je důkaz prvé nerovnosti proveden pro případ, kdy D' obsahuje oproti D jeden dělící bod navíc. Obecný případ prvé nerovnosti pak snadno odvodíme indukcí.

Důkaz (a) - pokračování

Protože

$$\inf_{[x_{j-1},z]} f \geq \inf_{[x_{j-1},x_j]} f \quad \text{a} \quad \inf_{[z,x_j]} f \geq \inf_{[x_{j-1},x_j]} f,$$

dostáváme

$$\underline{S}(f,D') - \underline{S}(f,D) \geq \left(\inf_{[x_{j-1},x_j]} f \right) (z - x_{j-1} + x_j - z - x_j + x_{j-1}) = 0.$$

Tím je důkaz prvé nerovnosti proveden pro případ, kdy D' obsahuje oproti D jeden dělící bod navíc. Obecný případ prvé nerovnosti pak snadno odvodíme indukcí.
Důkaz třetí nerovnosti je pak možno vést obdobně jako důkaz nerovnosti prvé.

Důkaz (b)

Máme-li dána dělení D a D', snadno najdeme dělení D'' zjemňující D i D'.

Důkaz (b)

Máme-li dána dělení D a D', snadno najdeme dělení D'' zjemňující D i D'. Dle bodu (a) pak platí

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D'') \leq \overline{S}(f, D'') \leq \overline{S}(f, D').$$

Důkaz (c)

Je-li D dělení $[a, b]$, pak z (b) máme

$$\underline{S}(f, D) \leq \inf\{\overline{S}(f, D'); D' \text{ dělení } [a, b]\} = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz (c)

Je-li D dělení $[a, b]$, pak z (b) máme

$$\underline{S}(f, D) \leq \inf\{\overline{S}(f, D'); D' \text{ dělení } [a, b]\} = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy i

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\{\underline{S}(f, D); D \text{ dělení } [a, b]\} \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz (c)

Je-li D dělení $[a, b]$, pak z (b) máme

$$\underline{S}(f, D) \leq \inf\{\overline{S}(f, D'); D' \text{ dělení } [a, b]\} = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy i

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\{\underline{S}(f, D); D \text{ dělení } [a, b]\} \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tím je důkaz proveden.

Důsledek 9.2

Nechť f je omezená na $[a,b]$, D_1 a D_2 jsou dělení intervalu $[a,b]$. Potom

$$m(b-a) \leq \underline{S}(f, D_1) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{S}(f, D_2) \leq M(b-a),$$

kde $m = \inf\{f(x);\ x \in [a,b]\}$ a $M = \sup\{f(x);\ x \in [a,b]\}$.

Důkaz

První a poslední nerovnost plyne z definice horního a dolního součtu pro dělení D'' obasahující body a, b.

Důkaz

První a poslední nerovnost plyne z definice horního a dolního součtu pro dělení D'' obasahující body a, b. Druhá a čtvrtá nerovnost plynou z definice horního a dolního Riemannova integrálu.

Důkaz

První a poslední nerovnost plyne z definice horního a dolního součtu pro dělení D'' obasahující body a, b. Druhá a čtvrtá nerovnost plynou z definice horního a dolního Riemannova integrálu. Konečně třetí nerovnost plyne z Lemmatu 9.1(b).