Cvičení z Matematické analýzy 2, 29. 4. 2020

Úloha číslo 1

Nalezněte primitivní funkci:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení

Definiční obor integrandu je roven $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

Řešení

Definiční obor integrandu je roven $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Budeme tedy hledat primitivní funkci na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$.

Řešení

Definiční obor integrandu je roven $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Budeme tedy hledat primitivní funkci na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$. Použijeme Eulerovu substituci $\sqrt{x^2 + x + 1} = -x + t$.

Řešení

Definiční obor integrandu je roven $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Budeme tedy hledat primitivní funkci na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$. Použijeme Eulerovu substituci $\sqrt{x^2 + x + 1} = -x + t$. Potom máme

$$x = \frac{t^2 - 1}{1 + 2t} \qquad \text{a} \qquad dx = \frac{2t^2 + 2t + 2}{(1 + 2t)^2}\, dt.$$

Řešení

Definiční obor integrandu je roven $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Budeme tedy hledat primitivní funkci na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$. Použijeme Eulerovu substituci $\sqrt{x^2 + x + 1} = -x + t$. Potom máme

$$x = \frac{t^2 - 1}{1 + 2t} \qquad \text{a} \qquad \mathrm{d}x = \frac{2t^2 + 2t + 2}{(1 + 2t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Tato substituce převádí naši úlohu na integraci racionální funkce:

$$\int \frac{-2\frac{t^2-1}{1+2t} + t}{t} \cdot \frac{2t^2 + 2t + 2}{(1 + 2t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Řešení

Definiční obor integrandu je roven $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Budeme tedy hledat primitivní funkci na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$. Použijeme Eulerovu substituci $\sqrt{x^2 + x + 1} = -x + t$. Potom máme

$$x = \frac{t^2 - 1}{1 + 2t} \qquad \text{a} \qquad \mathrm{d}x = \frac{2t^2 + 2t + 2}{(1 + 2t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Tato substituce převádí naši úlohu na integraci racionální funkce:

$$\int \frac{-2\frac{t^2-1}{1+2t} + t}{t} \cdot \frac{2t^2 + 2t + 2}{(1 + 2t)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{(2 + t)(2t^2 + 2t + 2)}{t(1 + 2t)^3}\,\mathrm{d}t.$$

Rozklad na parciální zlomky budeme hledat ve tvaru

$$\frac{(2+t)(2t^2+2t+2)}{t(1+2t)^3} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+2t} + \frac{C}{(1+2t)^2} + \frac{D}{(1+2t)^3}.$$

Rozklad na parciální zlomky budeme hledat ve tvaru

$$\frac{(2+t)(2t^2+2t+2)}{t(1+2t)^3} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+2t} + \frac{C}{(1+2t)^2} + \frac{D}{(1+2t)^3}.$$

Pro každé $t \in \mathbf{R}$ musí platit:

$2t^3+6t^2+6t+4 =$

Rozklad na parciální zlomky budeme hledat ve tvaru

$$\frac{(2+t)(2t^2+2t+2)}{t(1+2t)^3} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+2t} + \frac{C}{(1+2t)^2} + \frac{D}{(1+2t)^3}.$$

Pro každé $t \in \mathbf{R}$ musí platit:

$$2t^3+6t^2+6t+4 = A(1+2t)^3+Bt(1+2t)^2+Ct(1+2t)+Dt.$$

Rozklad na parciální zlomky budeme hledat ve tvaru

$$\frac{(2+t)(2t^2+2t+2)}{t(1+2t)^3} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+2t} + \frac{C}{(1+2t)^2} + \frac{D}{(1+2t)^3}.$$

Pro každé $t \in \mathbf{R}$ musí platit:

$$2t^3+6t^2+6t+4 = A(1+2t)^3+Bt(1+2t)^2+Ct(1+2t)+Dt.$$

Dosazením $t = 0$ a $t = -1/2$ dostáváme $A = 4$ a $D = -9/2$.

Rozklad na parciální zlomky budeme hledat ve tvaru

$$\frac{(2+t)(2t^2+2t+2)}{t(1+2t)^3} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+2t} + \frac{C}{(1+2t)^2} + \frac{D}{(1+2t)^3}.$$

Pro každé $t \in \mathbf{R}$ musí platit:

$$2t^3+6t^2+6t+4 = A(1+2t)^3+Bt(1+2t)^2+Ct(1+2t)+Dt.$$

Dosazením $t=0$ a $t=-1/2$ dostáváme $A=4$ a $D=-9/2$. Porovnáním koeficientů u t^3 a t^2 pak dostaneme $B=-15/2$ a $C=-6$.

Potom máme

$$\int \left(\frac{4}{t} - \frac{15}{2(1+2t)} - \frac{6}{(1+2t)^2} - \frac{9}{2(1+2t)^3} \right) \mathrm{d}t \stackrel{c}{=}$$

Potom máme

$$\int \left(\frac{4}{t} - \frac{15}{2(1+2t)} - \frac{6}{(1+2t)^2} - \frac{9}{2(1+2t)^3} \right) \mathrm{d}t \stackrel{c}{=}$$

$$4 \log |t| - \frac{15}{4} \log |1+2t| + \frac{3}{1+2t} + \frac{9}{8(1+2t)^2}$$

na intervalech $(-\infty, -1/2)$, $(-1/2, 0)$ a $(0, \infty)$.

Potom máme

$$\int \left(\frac{4}{t} - \frac{15}{2(1+2t)} - \frac{6}{(1+2t)^2} - \frac{9}{2(1+2t)^3} \right) \mathrm{d}t \stackrel{c}{=}$$

$$4 \log |t| - \frac{15}{4} \log |1+2t| + \frac{3}{1+2t} + \frac{9}{8(1+2t)^2}$$

na intervalech $(-\infty, -1/2)$, $(-1/2, 0)$ a $(0, \infty)$. Na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$ dostáváme řešení

$$\int \frac{\sqrt{x^2+x+1} - x}{\sqrt{x^2+x+1} + x} \, \mathrm{d}x \stackrel{c}{=}$$

$$4 \log(\sqrt{x^2+x+1} + x) - \frac{15}{4} \log(1 + 2\sqrt{x^2+x+1} + 2x)$$

$$+ \frac{3}{1 + 2\sqrt{x^2+x+1} + 2x} + \frac{9}{8(1 + 2\sqrt{x^2+x+1} + 2x)^2}.$$

Potom máme

$$\int\left(\frac{4}{t}-\frac{15}{2(1+2t)}-\frac{6}{(1+2t)^2}-\frac{9}{2(1+2t)^3}\right)\mathrm{d}t \overset{c}{=}$$

$$4\log|t|-\frac{15}{4}\log|1+2t|+\frac{3}{1+2t}+\frac{9}{8(1+2t)^2}$$

na intervalech $(-\infty,-1/2)$, $(-1/2,0)$ a $(0,\infty)$. Na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(-1,\infty)$ dostáváme řešení

$$\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=}$$

$$4\log(\sqrt{x^2+x+1}+x)-\frac{15}{4}\log(1+2\sqrt{x^2+x+1}+2x)$$

$$+\frac{3}{1+2\sqrt{x^2+x+1}+2x}+\frac{9}{8(1+2\sqrt{x^2+x+1}+2x)^2}.$$

Úloha číslo 2

Spočtěte

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{2x+1}}{(x+2)^2}\,dx.$$

Řešení

Použijeme substituci $\sqrt{2x+1} = t$,

Řešení

Použijeme substituci $\sqrt{2x+1} = t$, tj. $x = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$, $dx = t\,dt$.

Řešení

Použijeme substituci $\sqrt{2x+1} = t$, tj. $x = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$, $dx = t\,dt$. Dostaneme

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{4t^2}{(t^2+3)^2}\,dt$$

Řešení

Použijeme substituci $\sqrt{2x+1} = t$, tj. $x = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$, $dx = t\,dt$. Dostaneme

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{4t^2}{(t^2+3)^2}\,dt$$

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme

$$\frac{4t^2}{(t^2+3)^2} = \frac{4}{t^2+3} - \frac{12}{(t^2+3)^2}\,.$$

Řešení

Použijeme substituci $\sqrt{2x+1} = t$, tj. $x = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$, $dx = t\,dt$. Dostaneme

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{4t^2}{(t^2+3)^2}\,dt$$

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme

$$\frac{4t^2}{(t^2+3)^2} = \frac{4}{t^2+3} - \frac{12}{(t^2+3)^2}.$$

Zintegrovat $\frac{4}{t^2+3}$ není obtížné, primitivní funkci k funkci $\frac{12}{(t^2+3)^2}$ najdeme například pomocí rekurentní formule pro integrály typu $\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$.

Celkově dostaneme

$$\int \left(\frac{4}{t^2+3} - \frac{12}{(t^2+3)^2} \right) dt$$

$$\stackrel{c}{=} \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{2t}{t^2+3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Tedy je

$$I = \left[\frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{2t}{t^2+3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} \right]_1^{\sqrt{3}}$$

Tedy je

$$I = \left[\frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{2t}{t^2+3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}}\right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\pi}{18} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

Úloha číslo 3

Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}, \qquad p > 0.$$

Úloha číslo 4

Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right).$$

Úloha číslo 5

Spočtěte

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbf{N}.$$