1. Řada diverguje. Pro spor nechť konverguje, pak splňuje nutnou podmínku konvergence, tedy

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{2n^2+5n+4}{2n^2+5}=0.$$

Speciálně toto splňuje i vybraná podposloupnost členů se sudými indexy, neboli

$$0=\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n}\frac{2(2n)^2+5(2n)+4}{2(2n)^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+10n+4}{8n^2+5}=1,$$

což je spor. Řada tedy nutně diverguje.

2. Platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^3+1}}{\frac{1}{n}}=\frac{n^3}{n^3+1}=1\in(0,\infty)$$

a obě $\frac{n^2}{n^3+1}$, $\frac{1}{n}$ jsou nezáporná čísla. Limitním srovnávacím kritériem tak konverguje $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$, právě pokud konverguje $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, což je divergentní harmonická řada. Řada tedy diverguje.

3. Užijme podílové kritérium. Platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0,$$

takže řada konverguje.

4. Využijeme odhadu

$$\binom{2n}{n}\le\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}=(1+1)^{2n}=4^n,$$

kde první nerovnost plyne z nezápornosti všech členů sumy vpravo. Dále je $\binom{2n}{n}\frac{1}{5^n}$ nezáporné pro každé n, takže posloupnost částečných součtů $s_i=\displaystyle\sum_{n=1}^{i}\binom{2n}{n}\frac{1}{5^n}$ je neklesající. Zároveň je omezená skrze

$$s_i\le\sum_{n=1}^{i}\frac{4^n}{5^n}\le\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{5}}=4,$$

takže nutně s_i konverguje a řada je konvergentní.

5. Pojmenujme posloupnost sčítanců a_n a upravme

$$a_n=\frac{\sqrt[3]{n^2+5}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n}}=\frac{4}{\sqrt[4]{n}\cdot\left((n^2+5)^{2/3}+(n^2+5)^{1/3}(n^2+1)^{1/3}+(n^2+1)^{2/3}\right)}.$$

Nyní užijme limitního srovnávacího kritéria (z posledního vyjádření zřejmě $a_n>0$) – díky $\frac{19}{12}=\frac{1}{4}+2\cdot\frac{2}{3}$ platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{19/12}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\left(1+\frac{5}{n^2}\right)^{2/3}+\left(1+\frac{5}{n^2}\right)^{1/3}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/3}+\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2/3}}=\frac{4}{1+1+1}=\frac{4}{3}\in(0,\infty),$$

takže $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje právě tehdy, konverguje-li $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{19/12}}$, což je ale díky $\frac{19}{12}>1$ konvergentní řada. Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ tak konverguje.

6. Platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+\frac{1}{n}}\sqrt{2+\frac{3}{n}}=2\in(0,\infty),$$

takže zkoumaná řada konverguje právě tehdy, když konverguje harmonická řada. Řada tak diverguje.

7. Vzhledem k

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n}$$

a zřejmé nezápornosti členů obou řad stačí ukázat konvergenci druhé řady. K tomu užijeme Cauchyho odmocninové kritérium – platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^5}{3^n}} = \frac{\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^5}{3} = \frac{1}{3} < 1,$$

kde využíváme známého $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, takže tato shora omezující řada konverguje, takže i původní zkoumaná řada konverguje.

8. Užijme podílové kritérium. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{n!}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{2n+1}} = 0,$$

např. protože $2^n \ge n+1$ pro přirozené n (matematickou indukcí), tedy $\frac{n+1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$ je součinem omezeného výrazu a výrazu jdoucího do nuly. Z toho řada konverguje.

9. Užijme limitní srovnávací kritérium (je známo, že platí $2^{n-1} \ge n$ pro každé přirozené n a rovnost nastává pouze pro $n \in \{1, 2\}$, takže členy řady jsou nezáporné). Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{2^n - 2n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{1 - \frac{n}{2^{n-1}}} = 3 \in (0, \infty),$$

neboť $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^{n-1}} = 0$. Zkoumaná řada tak konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, což je konvergentní geometrická řada. Zkoumaná řada tedy konverguje.

10. Užijme limitní srovnávací kritérium – platí $3^n \ge 2^n \ge n+1 > n$ pro každé nezáporné celé n, takže jsou členy řady nezáporné. Dále platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n + (-1)^n n}{3^n + (-1)^n n}}{\frac{2^n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{n}{(-2)^n}}{1 + \frac{n}{(-3)^n}} = 1 \in (0, \infty),$$

neboť limitou podílu libovolné polynomální funkce s exponenciální funkcí a^n pro $|a| > 1$ je nula. Zkoumaná řada tak konverguje právě tehdy, když konverguje $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$, což je konvergentní geometrická řada, takže zkoumaná řada konverguje.

11. Pojmenujme posloupnost sčítanců a_n a upravme

$$a_n = \sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1} = \frac{2}{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3-1}}.$$

Dále užijme limitní srovnávací kritérium (z posledního vyjádření je $a_n > 0$) – platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^3}}} = \frac{2}{1+1} = 1 \in (0, \infty),$$

tedy $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, konverguje-li $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, což je konvergentní řada, takže $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

12. Užijme odmocninové kritérium. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^5}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{5} = \frac{1}{5} < 1,$$

takže zkoumaná řada konverguje.

13. Užijme limitní srovnávací kritérium (členy řady jsou zřejmě nezáporné) – platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n + 4^n}{4^n + 5^n}}{\left(\frac{4}{5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1}{\left(\frac{4}{5}\right)^n + 1} = 1 \in (0, \infty),$$

takže zkoumaná řada konverguje právě tehdy, konverguje-li $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$, což je konvergentní geometrická řada. Zkoumaná řada tak konverguje.

14. Ukažme, že řada je absolutně konvergentní. Z toho speciálně vyplyne její konvergence. K tomu užijme limitního srovnávacího kritéria (absolutní hodnoty sčítanců jsou jistě nezáporné) – platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|(-1)^n \frac{2n^2+3n+4}{(2n^2+5)^2}\right|}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^4+3n^3+4n^2}{4n^4+20n^2+25} = \frac{1}{2} \in (0,\infty),$$

takže řada absolutních hodnot sčítanců konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, což je konvergentní řada. Zkoumaná řada je tak absolutně konvergentní, a speciálně tedy konvergentní.

15. Ukažme, že řada konverguje pro $z \in [-1,1)$. Zaprvé pro $|z| > 1$ nekonverguje $\frac{z^n}{n}$ k nule, takže není splněna nutná podmínka konvergence. Pro $z = 1$ dostáváme harmonickou řadu, která diverguje, a pro $z = -1$ dostáváme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, která konverguje z Leibnizova kritéria (posloupnost $\frac{1}{n}$ je klesající s limitou 0).

Pro $|z| < 1$ ukážeme absolutní konvergenci – na řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n}$ aplikujeme odmocninové kritérium, obdržíme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|z|^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{\sqrt[n]{n}} = |z| < 1,$$

takže řada absolutních hodnot sčítanců konverguje, pročež i původní řada konverguje. V souhrnu tak řada konverguje právě pro $z \in [-1,1)$.

16. Pro $|z| \geq 1$ není splněna nutná podmínka konvergence (posloupnost n^3 diverguje). Pro $|z| < 1$ ukážeme absolutní konvergenci odmocninovým kritériem – platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 |z|^n} = |z| \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = |z| < 1.$$

V souhrnu tak řada konverguje právě pro $|z| < 1$.

17. Ukažme, že řada je absolutně konvergentní pro všechna $z \in \mathbb{R}$ pomocí podílového kritéria – platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}|z|^{n+1}}{\frac{2^n}{n!}|z|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2|z|}{n+1} = 0.$$

Řada je tedy absolutně konvergentní, pročež konverguje.

18. Substituujme $y = \frac{z}{3}$. Potom je tato řada s parametrem y totožná s řadou **16**, která konverguje právě pro $|y| < 1$. Tato řada tak bude konvergovat právě pro $|z| < 3$.

19. Ukažme konvergenci právě pro $|z| \leq 1$. Pro $|z| > 1$ není splněna nutná podmínka konvergence. Pro $|z| \leq 1$ je řada absolutně konvergentní, neboť

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

tedy řada absolutních hodnot sčítanců je shora omezena, tedy z nezápornosti svých členů konverguje. Zkoumaná řada je tak absolutně konvergentní, a tedy konverguje.

20. Pro $|z| > 1$ není splněna nutná podmínka konvergence, takže řada diverguje. Pro $z = 1$ dostáváme řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, která díky klesajícnosti $\frac{1}{2n+1}$ konverguje z Leibnizova kritéria. Stejně tak pro $z = -1$ řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ konverguje Leibnizovým kritériem. Pro $|z| < 1$ ukažme absolutní konvergenci. Užijme limitního srovnávacího kritéria (členy řady absolutních hodnot sčítanců jsou nezáporné) – platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}\right|}{z^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0,$$

takže ke konvergenci zkoumané řady postačí konvergence $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1}$. Tato řada však konverguje, neboť

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1} = z \sum_{n=0}^{\infty} (z^2)^n,$$

kde vytknutá řada vpravo je konvergentní geometrická, neboť $\left|z^2\right| = |z|^2 < 1$. Řada tak konverguje právě pro $|z| \leq 1$.

21. Ukažme, že řada konverguje právě pro $p > 0$ a absolutně konverguje pro $p > 1$. Pro $p \leq 0$ zřejmě není splněna nutná podmínka konvergence, neboť tehdy platí

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right| \geq \lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n-1}\right| = 1 \neq 0.$$

Pro $p > 0$ je posloupnost $\frac{1}{n^p}$ klesající, takže řada konverguje Leibnizovým kritériem. V řadě absolutních hodnot sčítanců obdržíme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},$$

což je pro $p > 1$ známá konvergentní řada a pro $p \leq 1$ diverguje, např. protože posloupnost částečných součtů je zdola omezena částečnými součty harmonické řady.

22. Ukažme, že řada konverguje právě pro $p > 0$ a absolutně konverguje právě pro $p > 1$. Pro $p \leq 0$ zřejmě není splněna nutná podmínka konvergence, neboť tehdy platí

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}\right| \geq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1/n}} = 1 \neq 0.$$

Pro $p > 0$ ukážeme, že posloupnost $a_n = \frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ je od nějaké chvíle klesající, z toho potom Leibnizovým kritériem vyplyne konvergence řady vzniklé vynecháním několika prvních členů (tak, aby posloupnost zbylých sčítanců byla klesající). Konvergence řady se nemění změnou, přidáním či vynecháním konečně mnoha členů, takže z tohoto vyplyne konvergence zkoumané řady.

Nyní stačí ukázat, že funkce $x^{-p-\frac{1}{x}}$ je klesající na intervalu $[c,\infty)$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}^+$. Její derivací je na $\mathbb{R}^+$ rovna

$$\left(e^{-\left(p+\frac{1}{x}\right)\log x}\right)' = -\left(e^{-\left(p+\frac{1}{x}\right)\log x}\right)\cdot\left(\left(p+\frac{1}{x}\right)\log x\right)' = -x^{-p-\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{p+\frac{1}{x}}{x} - \frac{\log x}{x^2}\right).$$

Tato derivace je spojitá na $\mathbb{R}^+$ a platí $-x^{-p-\frac{1}{x}} < 1$ pro každé kladné reálné x. Stačí tak ukázat, že $\frac{p+\frac{1}{x}}{x} - \frac{\log x}{x^2} > 0$ pro všechna dostatečně vysoká x. To je ekvivalentní $xp + 1 > \log x$, což pro dostatečně vysoká x platí, neboť libovolná nekonstantní polynomální funkce s kladným vedoucím koeficientem (máme $p > 0$) musí přerůst logaritmus. Tím je konvergence zkoumané řady pro $p > 0$ dokázána.

Zkoumejme nyní absolutní konvergenci, tedy konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$. Užijme limitní srovnávací kritérium – platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{n}} = \left(\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}\right)^{-1} = 1 \in (0,\infty),$$

takže zkoumaná řada absolutně konverguje právě tehdy, když konverguje $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, což je známá řada konvergující právě pro $p > 1$

23. Ukažme, že řada konverguje pro všechna $p > 0$ a absolutně konverguje pro $p > 1$. Nechť jsou s_i $(i \geq 2)$ částečné součty zkoumané řady a pro $i \geq 0$ zaveďme

$$a_i = \sum_{n=1}^{i}\frac{1}{(2n+1)^p}, \qquad b_i = \sum_{n=1}^{i}\frac{-1}{(2n)^p}.$$

Všimněme si, že platí

$$a_i = \sum_{n=1}^{i}\frac{(-1)^{2n}}{(2n+(-1)^{2n})^p},$$
$$b_i = \sum_{n=1}^{i}\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1+(-1)^{2n+1})^p},$$

z čehož pro $i \geq 1$ platí

$$s_{2i} = a_i + b_{i-1}, \qquad s_{2i+1} = a_i + b_i.$$

Zavedeme-li pro $i \geq 2$ ještě jednu posloupnost

$$c_i = \sum_{n=2}^{i} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p},$$

snadno nahlédneme rovnosti $c_{2i} = a_{i-1} + b_i$, $c_{2i+1} = a_i + b_i$. Dohromady tak platí $s_{2i+1} = c_{2i+1}$ a pro sudý index $2i$ platí

$$s_{2i} - c_{2i} = (a_i - a_{i-1}) - (b_i - b_{i-1}) = \frac{1}{(2i+1)^p} + \frac{1}{(2i)^p}.$$

Přitom ale limitou tohoto výrazu je

$$\lim_{i\to\infty} (s_{2i} - c_{2i}) = \lim_{i\to\infty} \left(\frac{1}{(2i+1)^p} + \frac{1}{(2i)^p} \right) = 0 + 0 = 0,$$

takže dohromady posloupnost s_i konverguje právě tehdy, konverguje-li c_i. Přitom ale posloupnost $\frac{1}{n^p}$ je monotónní s limitou 0, takže řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

Leibnizovým kritériem konverguje a je limitou c_i, z čehož s_i konverguje.

Pro vyšetření absolutní konvergence uvažujeme konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+(-1)^n)^p}$. Limitním srovnávacím kritériem (členy této řady jsou nezáporné) máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+(-1)^n)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^p} = \frac{1}{\left(1 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^p} = 1,$$

takže zkoumaná řada konverguje absolutně právě tehdy, konverguje-li $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, což je známá řada konvergující právě pro $p > 1$.

24. Řada konverguje, ne však absolutně. Nejprve užijme Leibnizovo kritérium – ukážeme, že od nějaké chvíle je posloupnost $\frac{k}{k+1} \sin \frac{1}{k} = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \sin \frac{1}{k}$ klesající (platí $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} \sin \frac{1}{k} = 1 \cdot 0 = 0$). Pojmenujme $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \sin \frac{1}{x}$ a zderivujme

$$f'(x) = \left(\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \sin \frac{1}{x}\right)' = -\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) \sin \frac{1}{x} + \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Nyní je $f'(x) < 0$ ekvivalentní nerovnosti

$$\frac{1}{(x+1)^2} \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} < \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x},$$
$$\frac{x^2}{(x+1)^2} \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \cos \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} < 0.$$

Přitom platí

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2} \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \cos \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} = \\
&= \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1}\right)^2 \cdot \left(\lim_{x\to\infty} \sin \frac{1}{x}\right) + \left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1}\right) \cdot \left(\lim_{x\to\infty} \cos \frac{1}{x}\right) - \left(\lim_{x\to\infty} \cos \frac{1}{x}\right) = \\
&= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 1 = -1,
\end{aligned}$$

kde využíváme spojitosti funkcí sin, cos a znalosti jejich hodnot v bodě 0. Pro dostatečně vysoká x už tedy platí $f'(x) < 0$, neboli posloupnost $\frac{k}{k+1} \sin \frac{1}{k}$ už je od nějaké chvíle klesající. Tím nějaká podřada zkoumané řady vzniklá vynecháním několika (konečně mnoha) prvních členů konverguje, tedy i zkoumaná řada konverguje.

Pro absolutní konvergenci vyšetřeme $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} \sin \frac{1}{k}$ – využijeme limitní srovnávací kritérium, platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k}{k+1}\sin\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = \left(\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1}\right)\cdot\left(\lim_{k\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}}\right) = 1\cdot \lim_{y\to 0^+}\frac{\sin y}{y} = 1,$$

kde v předposlední rovnosti substituujeme $y = \frac{1}{k}$ a od limity posloupnosti přecházíme k limitě funkce pomocí Heineho věty. Z toho zkoumaná řada konverguje absolutně právě tehdy, konverguje-li $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, což je divergentní harmonická řada.

25. Řada konverguje, ne však absolutně. Ukažme, že posloupnost $\frac{k}{k^2+1}\cos\frac{1}{k}$ je od nějaké chvíle klesající. Spolu s $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k^2+1}\cos\frac{1}{k} = 0\cdot 1 = 0$ toto Leibnizovým kritériem povede ke konvergenci nějaké podřady zkoumané řady, která se od ní liší pouze vynecháním konečně mnoha počátečních členů, tedy i ke konvergenci zkoumané řady. Pojmenujme $f(x) = \frac{x}{x^2+1}\cos\frac{1}{x}$ a zderivujme

$$f'(x) = \frac{(x^2+1) - 2x\cdot x}{(x^2+1)^2}\cos\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}\cdot\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Nerovnost $f'(x) > 0$ pak ekvivalentně (s využitím $x^2+1>0$ pro všechna x) upravíme do podoby

$$\frac{1-x^2}{x^2+1}\cos\frac{1}{x} + \frac{\sin\frac{1}{x}}{x} < 0.$$

Přitom ale

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{x^2+1}\cos\frac{1}{x} + \frac{\sin\frac{1}{x}}{x} = \left(\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{x^2+1}\right)\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}\right) + \left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)\left(\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}\right) = -1\cdot 1 + 0\cdot 0 = -1 < 0,$$

takže $f'(x) < 0$ platí pro všechna dostatečně vysoká x, což jsme chtěli dokázat (funkce $f(x)$ i posloupnost sčítanců zkoumané řady jsou tímto od jisté chvíle klesající). Zkoumaná řada tak konverguje.

Pro absolutní konvergenci vyšetřeme $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^2+1}\cos\frac{1}{k}$ – využijeme limitní srovnávací kritérium, platí

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{k}{k^2+1}\cos\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}}\left(\lim_{k\to\infty}\frac{k^k}{k^2+1}\right)\cdot\lim_{k\to\infty}\cos\frac{1}{k} = 1\cdot\lim_{y\to 0^+}\cos y = 1,$$

kde v předposlední rovnosti substituujeme $y = \frac{1}{k}$ a od limity posloupnosti přecházíme k limitě funkce pomocí Heineho věty. Z toho zkoumaná řada konverguje absolutně právě tehdy, konverguje-li $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, což je divergentní harmonická řada.

26. Ukažme, že řada konverguje právě pro $\alpha > \frac{1}{3}$. Pojmenujme posloupnost sčítanců řady $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a upravme

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n+1}}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha\left((n+2)^{2/3} + (n+2)^{1/3}(n+1)^{1/3} + (n+1)^{2/3}\right)}.$$

Užijme limitní srovnávací kritérium (z posledního vyjádření jsou členy nezáporné) – platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{\alpha+\frac{2}{3}}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{2/3}}{(n+2)^{2/3} + (n+2)^{1/3}(n+1)^{1/3} + (n+1)^{2/3}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2/3} + \left(1+\frac{2}{n}\right)^{1/3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/3} + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2/3}},$$

takže zkoumaná řada konverguje, právě pokud konverguje $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha+\frac{2}{3}}}$. Toto je ale známá řada konvergující právě pro $\alpha + \frac{2}{3} > 1$, tedy $\alpha > \frac{1}{3}$.

27. Ukážeme, že řada je neabsolutně konvergentní. Pojmenujme $a_n = \sqrt[3]{n^2+n} - \sqrt[3]{n^2}$ a $f(x) = \sqrt[3]{x^2+x} - \sqrt[3]{x^2}$. Ukážeme, že f je na $[1,\infty)$ klesající. Z toho vyplyne i klesajícnost $a_n = f(n)$ a konvergence zkoumané řady Leibnizovým kritériem. Zderivujme

$$f'(x) = \frac{1}{3}\cdot(x^2+x)^{-2/3}\cdot(2x+1) - \frac{2}{3}\cdot x^{-1/3}.$$

Tato derivace je spojitá a platí $f'(1) = 2^{-2/3} - \frac{2}{3} \doteq -0.0367 < 0$, stačí tedy pro klesajícnost f ukázat, že $f'(x)$ nenabývá pro $x \in [1,\infty)$ hodnoty 0. Rovnost $f'(x)$ je ekvivalentní

$$\begin{aligned}(x^2+x)^{-2/3} &= 2x^{-1/3},\\ (x^2+x)^2 &= \frac{1}{8}x,\\ 8x^4+16x^3+8x^2-x &= 0.\end{aligned}$$

Přitom ale pro $x \geq 1$ je určitě $x^2 \geq x$ a zároveň $x^2 > 0$, takže $8x^4+16x^3+8x^2-x = (8x^4+16x^3+6x^2) + x^2 + (x^2-x) > 0+0+0 = 0$ a rovnost $f'(x) = 0$ vskutku nemůže pro $x \geq 1$ nastat. Tím je konvergence řady dokázána.

Pro absolutní konvergenci vyšetřujeme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, podobně jako výše platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{1/3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{2/3} + (1+\frac{1}{n})^{1/3}1^{1/3} + 1^{2/3}} = \frac{1}{3} \in (0,\infty)$$

takže $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$, což je známá divergentní řada.

28. Pojmenujme $a_n = \frac{n^2+(-1)^n n^{\frac{2n}{n+1}}}{n^{\frac{4n}{n+1}}}$ a všimněme si, že člen řady pro $n = 1$ je roven nule, stačí tedy vyšetřovat konvergenci $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$. Platí $\frac{2n}{n+1} < \frac{2n+2}{n+1} = 2$ a funkce $x \mapsto n^x$ je pro pevně zvolené $n > 1$ rostoucí, takže určitě

$$n^2 + (-1)^n n^{\frac{2n}{n+1}} \geq n^2 - n^{\frac{2n}{n+1}} \geq 0,$$

neboli členy a_n jsou nezáporné. Zároveň

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + n^{\frac{2n}{n+1}}}{n^{\frac{4n}{n+1}}},$$

stačí tedy ukázat konvergenci řady vpravo. Ukažme $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{2n}{n+1}-2} = 1$. Platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+1} - 2\right)\log n = -2\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n+1} = 0,$$

z toho pak $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{2n}{n+1}-2} = \exp\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+1}-2\right)\log n\right) = e^0 = 1$. Analogicky odvodíme $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{4n}{n+1}-4} = 1$. Nyní užijme limitní srovnávací kritérium – platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+n^{\frac{2n}{n+1}}}{n^{\frac{4n}{n+1}}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+n^{\frac{2n}{n+1}-2}}{n^{\frac{4n}{n+1}-4}} = \frac{1+1}{1} = 2 \in (0,\infty),$$

takže limitním srovnávacím kritériem stačí ověřit konvergenci $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, což je však známá konvergentní řada (resp. její podřada vzniklá vynecháním prvního členu).