

6 Integrál – pokračování

6.1 Zobecněný Riemannův integrál

Lemma 6.20 (spojitost Riemannova integrálu). *Necht' $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a funkce f má na intervalu $\langle a, b \rangle$ Riemannův integrál. Pak platí*

$$\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f = \lim_{x \rightarrow a+} \int_x^b f.$$

Lemma 6.21. *Necht' $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$, a funkce f má Riemannův integrál na každém podintervalu $\langle x, y \rangle \subset (a, b)$. Necht' dále $c \in (a, b)$, existují limity $\lim_{x \rightarrow a+} \int_x^c f$ a $\lim_{y \rightarrow b-} \int_c^y f$ a jejich součet je definován. Pak pro každé $d \in (a, b)$ existují $\lim_{x \rightarrow a+} \int_x^d f$ a $\lim_{y \rightarrow b-} \int_d^y f$ a platí*

$$\lim_{x \rightarrow a+} \int_x^d f + \lim_{y \rightarrow b-} \int_d^y f = \lim_{x \rightarrow a+} \int_x^c f + \lim_{y \rightarrow b-} \int_c^y f.$$

Definice. Necht' $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$, a necht' funkce f je definovaná na intervalu (a, b) . Má-li funkce f Riemannův integrál na každém podintervalu $\langle x, y \rangle \subset (a, b)$ a existuje-li $c \in (a, b)$ takové, že limity $\lim_{x \rightarrow a+} \int_x^c f$ a $\lim_{y \rightarrow b-} \int_c^y f$ existují a jejich součet má smysl, pak definujeme **zobecněný Riemannův integrál** funkce f na intervalu (a, b) jako

$$\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow a+} \int_x^c f + \lim_{y \rightarrow b-} \int_c^y f.$$

Lemma 6.22. *Necht' $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a funkce f je omezená na intervalu $\langle a, b \rangle$. Jestliže existuje Riemannův integrál funkce f na každém podintervalu $\langle c, d \rangle \subset (a, b)$, pak existuje i Riemannův integrál funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$.*

Lemma 6.23. *Necht' $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$, f je nezáporná na (a, b) a f má Riemannův integrál na každém podintervalu $\langle x, y \rangle \subset (a, b)$. Potom f má zobecněný Riemannův integrál na (a, b) .*

————— Konec 1. přednášky, 2. 10. 2024 —————

Věta 6.24. *Necht' $a, b \in \mathbf{R}^*$ a $c \in (a, b)$.*

- (i) *Jestliže funkce f má zobecněný Riemannův integrál na (a, b) , pak má f zobecněný Riemannův integrál i na (a, c) a (c, b) a platí*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

- (ii) *Necht' funkce f má zobecněný Riemannův integrál na (a, c) a (c, b) , f je omezená na nějakém okolí bodu c a součet $\int_a^c f + \int_c^b f$ má smysl. Pak f má zobecněný Riemannův integrál na (a, b) a platí*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Věta 6.25 (linearita zobecněného Riemannova integrálu). *Necht' $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$, f a g jsou funkce mající zobecněný Riemannův integrál na intervalu (a, b) a necht' $\alpha \in \mathbf{R}$. Potom*

(i) *funkce αf má zobecněný Riemannův integrál na (a, b) a platí*

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f,$$

má-li pravá strana smysl,

(ii) *je-li součet $\int_a^b f + \int_a^b g$ definovaný, pak má funkce $f + g$ zobecněný Riemannův integrál na (a, b) a platí*

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Věta 6.26. *Necht' $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$, a necht' f a g jsou funkce mající zobecněný Riemannův integrál na intervalu (a, b) . Potom platí:*

(i) *Je-li $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in (a, b)$, pak $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*

(ii) *Funkce $|f|$ má zobecněný Riemannův integrál na intervalu (a, b) a platí $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.*

Definice. Pokud zobecněný Riemannův integrál funkce f na intervalu (a, b) existuje a přitom je konečný, pak říkáme, že $\int_a^b f$ **konverguje**. Pokud je roven $+\infty$, nebo $-\infty$, nebo neexistuje, pak říkáme, že **diverguje**.

Věta 6.27 (srovnávací kritérium). *Necht' $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$, funkce f a g splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$ a f je na (a, b) spojitá. Pokud konverguje $\int_a^b g$, pak konverguje i $\int_a^b f$.*

Věta 6.28 (limitní srovnávací kritérium). *Necht' f a g jsou spojitě nezáporné funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$, $b \in \mathbf{R}^*$, a existuje limita $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma \in \mathbf{R}^*$.*

- *Je-li $\gamma \in (0, +\infty)$, pak $\int_a^b f$ konverguje, právě když konverguje $\int_a^b g$.*
- *Je-li $\gamma = 0$, pak z konvergence $\int_a^b g$ plyne konvergence $\int_a^b f$.*
- *Je-li $\gamma = +\infty$, pak z divergence $\int_a^b g$ plyne divergence $\int_a^b f$.*

Věta 6.29. *Necht' $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$, f je spojitá na (a, b) , a F je primitivní funkce k f na (a, b) . Pak zobecněný Riemannův integrál funkce f na (a, b) existuje, právě když existují limity $\lim_{x \rightarrow a+} F(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$ a jejich rozdíl má smysl. V tom případě platí*

$$\int_a^b f = [F]_a^b = \lim_{x \rightarrow b-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a+} F(x).$$

6.2 Poznámka o Lebesgueově integrálu

Definice. Necht' $\mathcal{A}$ je nějaký systém podmnožin $\mathbf{R}^n$. Řekneme, že $\mathcal{A}$ je σ -**algebra**, jestliže platí:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- (ii) je-li $A \in \mathcal{A}$, pak také $\mathbf{R}^n \setminus A \in \mathcal{A}$,
- (iii) jsou-li $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, pak také $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

Definice. Necht' $\mathcal{A}$ je σ -algebra podmnožin $\mathbf{R}^n$. Zobrazení $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle \cup \{+\infty\}$ se nazývá **míra**, jestliže $\mu(\emptyset) = 0$, a jestliže je σ -**aditivní**, tj. pokud $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ jsou po dvou disjunktní, pak $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$. Množinám z $\mathcal{A}$ se říká μ -**měřitelné** množiny.

Věta 6.30. Existuje právě jedna σ -algebra Λ na $\mathbf{R}^n$ a právě jedna míra λ na Λ mající následující vlastnosti:

- (i) Λ obsahuje všechny otevřené podmnožiny $\mathbf{R}^n$,
- (ii) jestliže $A, B \in \Lambda$, $A \subset E \subset B$, a $\lambda(B \setminus A) = 0$, pak $E \in \Lambda$,
- (iii) $\lambda(K) < +\infty$ pro každou kompaktní $K \subset \mathbf{R}^n$,
- (iv) je-li $I = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \dots \times \langle a_n, b_n \rangle \subset \mathbf{R}^n$, pak $\lambda(I) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$,
- (v) λ je translačně invariantní, tj. $\lambda(x + A) = \lambda(A)$ pro každou $A \in \Lambda$ a $x \in \mathbf{R}^n$.

Definice. Míra λ z předchozí věty se nazývá **Lebesgueova míra** a množinám v Λ se říká **lebesgueovsky měřitelné množiny**.

———— Konec 2. přednášky, 9. 10. 2024 ————

Věta 6.31 (vlastnosti Lebesgueova integrálu). Necht' M je měřitelná množina a f, g jsou měřitelné funkce.

- (i) Necht' $\alpha \in \mathbf{R}$. Pak $\int_M \alpha f d\lambda = \alpha \int_M f d\lambda$ a $\int_M (f + g) d\lambda = \int_M f d\lambda + \int_M g d\lambda$, pokud jsou výrazy napravo definovány.
- (ii) Platí-li $f \leq g$ skoro všude na M , pak $\int_M f d\lambda \leq \int_M g d\lambda$, pokud oba integrály existují.
- (iii) Jestliže $\int_M f d\lambda$ existuje, pak existuje i $\int_M |f| d\lambda$ a platí $|\int_M f d\lambda| \leq \int_M |f| d\lambda$.
- (iv) Je-li $f = 0$ skoro všude na M , pak $\int_M f d\lambda = 0$.
- (v) Je-li $f = g$ skoro všude na M , pak $\int_M f d\lambda = \int_M g d\lambda$, pokud alespoň jeden z integrálů existuje.

Věta 6.32 (souvislost s Riemannovým integrálem).

- (i) Jestliže existuje Riemannův integrál $\int_a^b f$, pak existuje i Lebesgueův integrál $\int_{(a,b)} f d\lambda$ a oba integrály se rovnají.
- (ii) Je-li f omezená na $\langle a, b \rangle$, pak její Riemannův integrál existuje, právě když je skoro všude spojitá.
- (iii) Je-li f spojitá nezáporná funkce na (a, b) , pak $\int_{(a,b)} f d\lambda = \int_a^b f$, kde vpravo je zobecněný Riemannův integrál.

Věta 6.33 (Fubini). Necht' $m, n \in \mathbb{N}$ a $f: \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovatelná funkce. Pro každé $x \in \mathbb{R}^m$ definujme funkci $f_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $f_x(y) = f(x, y)$. Pak pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^m$ je funkce f_x integrovatelná a platí

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_x(y) d\lambda(y) \right) d\lambda(x).$$

Věta 6.34 (o substituci). Necht' $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, funkce $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C^1(G)$ a zobrazení $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ definované předpisem $\varphi(x) = [\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)]$ necht' je prosté. Dále předpokládejme, že determinant (tzv. **jakobián**)

$$J_\varphi(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(x) \end{vmatrix}$$

je nenulový pro každé $x \in G$. Pak $\varphi(G)$ je otevřená a pro každou měřitelnou $M \subset \varphi(G)$ a každou měřitelnou $f: \varphi(G) \rightarrow \mathbb{R}^*$ platí

$$\int_M f d\lambda = \int_{\varphi^{-1}(M)} f(\varphi(x)) |J_\varphi(x)| d\lambda(x),$$

pokud je alespoň jeden z těchto integrálů definován.

7 Číselné řady

Definice. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbb{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme **m -tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat **n -tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součtem** nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada **konverguje**, je-li její součet reálné číslo. V opačném případě řekneme, že řada **diverguje**.

Věta 7.1 (nutná podmínka konvergence řady). *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim a_n = 0$.*

Věta 7.2 (srovnávací kritérium). *Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou dvě řady splňující $0 \leq a_n \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.*

(i) *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, je rovněž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.*

(ii) *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, je rovněž $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentní.*

Věta 7.3 (limitní srovnávací kritérium). *Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy splňující $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n/b_n = c \in (0, +\infty)$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Věta 7.4 (Cauchyovo odmocninové kritérium). *Budiž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s nezápornými členy. Potom platí:*

(i) *Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.*

(ii) *Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.*

————— Konec 4. přednášky, 23. 10. 2024 —————

Věta 7.5 (d'Alembertovo podílové kritérium). *Budiž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s kladnými členy. Potom platí:*

(i) *Je-li $\lim a_{n+1}/a_n < 1$, je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.*

(ii) *Je-li $\lim a_{n+1}/a_n > 1$, je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.*

Věta 7.6. *Necht' $\alpha \in \mathbb{R}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\alpha$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.*

Věta 7.7 (Leibnizovo kritérium). *Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. Necht' platí*

- $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- $\lim a_n = 0$.

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje.

Definice. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje.

Věta 7.8. *Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, je rovněž konvergentní.*

Definice. Budiž $\{k_n\}$ posloupnost přirozených čísel taková, že každé přirozené číslo je v ní obsaženo právě jednou. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ nazveme **přerovnáním řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 7.9 (přerovnání řady). *Necht' řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní. Potom každé její přerovnání $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ je absolutně konvergentní a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}.$$

————— Konec 5. přednášky, 30. 10. 2024 —————

8 Lineární algebra

8.1 Vektorové prostory

Symbol $\mathbf{K}$ značí množinu $\mathbf{R}$ nebo $\mathbf{C}$.

Definice. Vektorovým prostorem nad $\mathbf{K}$ rozumíme trojici $(V, +, \cdot)$, kde V je neprázdná množina, $+$ je operace z $V \times V$ do V a $\cdot$ je operace z $\mathbf{K} \times V$ do V , přičemž tyto operace mají následující vlastnosti:

- $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V: \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (komutativita sčítání),
- $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V: (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (asociativita sčítání),
- množina V obsahuje prvek, který značíme $\mathbf{o}$ (a říkáme mu **nulový prvek**), splňující

$$\forall \mathbf{v} \in V: \mathbf{o} + \mathbf{v} = \mathbf{v},$$

- $\forall \mathbf{v} \in V \exists \mathbf{w} \in V: \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{o}$,
- $\forall a, b \in \mathbf{K} \forall \mathbf{v} \in V: a \cdot (b \cdot \mathbf{v}) = (ab) \cdot \mathbf{v}$,
- $\forall a, b \in \mathbf{K} \forall \mathbf{v} \in V: (a + b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$,
- $\forall a \in \mathbf{K} \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V: a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v}$,
- $\forall \mathbf{v} \in V: 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Definice. Necht' $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor a $U \subset V$, $U \neq \emptyset$. Řekneme, že U je **vektorový podprostor** prostoru V , jestliže

- $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U: \mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$,
- $\forall a \in \mathbf{K} \forall \mathbf{u} \in U: a\mathbf{u} \in U$.

Definice. Necht' V je vektorový prostor nad $\mathbf{K}$, $k \in \mathbf{N}$ a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$. Řekneme, že vektor $\mathbf{u} \in V$ je **lineární kombinací vektorů** $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ s **koefficienty** $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{K}$, jestliže

$$\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k.$$

V tomto případě také říkáme, že **lineární kombinace vektorů** $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ s **koefficienty** $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ je rovna $\mathbf{u}$. Pokud $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$, pak mluvíme o **triviální lineární kombinaci** vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$; je-li některý koeficient nenulový, pak mluvíme o **netriviální lineární kombinaci**.

Definice. Necht' V je vektorový prostor nad $\mathbf{K}$. Vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \in V$ jsou **lineárně závislé**, pokud existuje jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru. Pokud vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ nejsou lineárně závislé, říkáme, že jsou **lineárně nezávislé**. Řekneme, že množina $M \subset V$ je **lineárně nezávislá**, jestliže libovolná m -tice po dvou různých vektorů z M je lineárně nezávislá.

Definice. Necht' $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor a $B \subset V$. Řekneme, že B je **báze** prostoru V , jestliže množina B je lineárně nezávislá a každý vektor z V je lineární kombinací (konečně mnoha) vektorů z B .

Věta 8.1.

- (i) Každou lineárně nezávislou podmnožinu vektorového prostoru lze doplnit na bázi tohoto prostoru.
- (ii) Každý vektorový prostor má bázi. Počet prvků báze je určen jednoznačně.

Definice. Počet prvků báze budeme nazývat **dimenze prostoru** V . Dimenzi V značíme $\dim V$. Necht' V je vektorový prostor nad $\mathbf{K}$. Je-li $\dim V < +\infty$, řekneme, že V je **konečnědimenzionální**. Je-li $\dim V = +\infty$, mluvíme o **nekonečnědimenzionálním** vektorovém prostoru.

Věta 8.2. Necht' V je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad $\mathbf{K}$.

- (i) Jsou-li $v_1, \dots, v_n$ lineárně nezávislé vektory v prostoru V , pak množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je bází prostoru V .
- (ii) Jestliže pro vektory $v_1, \dots, v_n \in V$ platí $\text{lin}_{\mathbf{K}}\{v_1, \dots, v_n\} = V$, je množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ bází prostoru V .

8.2 Lineární zobrazení a řešení soustav lineárních rovnic

Definice. Necht' U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbf{K}$. Zobrazení $L: U \rightarrow V$ se nazývá **lineární**, jestliže platí:

- $\forall u_1, u_2 \in U: L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2),$
- $\forall a \in \mathbf{K} \forall u \in U: L(au) = aL(u).$

Definice. Necht' U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbf{K}$, $L: U \rightarrow V$ necht' je lineární zobrazení. **Jádrem** lineárního zobrazení L nazveme množinu

$$\text{Ker}(L) = \{u \in U; L(u) = o\}.$$

Symbolem $\text{Im}(L)$ značíme obor hodnot zobrazení L , tedy

$$\text{Im } L = \{v \in V; \exists u \in U: L(u) = v\}.$$

Věta 8.3. Necht' U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbf{K}$, $L: U \rightarrow V$ necht' je lineární zobrazení. Potom platí:

- (i) Množina $\text{Ker}(L)$ je vektorovým podprostorem U .
- (ii) Množina $\text{Im}(L)$ je vektorovým podprostorem V .
- (iii) Pro dimenze platí: $\dim U = \dim \text{Ker}(L) + \dim \text{Im}(L).$

8.3 Kvadratické formy

Definice. Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Platí-li $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$, pak říkáme, že matice $\mathbb{A}$ je **symetrická**.

Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je symetrická matice. Pak funkci $\varphi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ definované předpisem $\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T \mathbb{A} \mathbf{u}$ říkáme **kvadratická forma**. Říkáme, že tato forma je **reprezentována maticí** $\mathbb{A}$ nebo že matice $\mathbb{A}$ je **reprezentující maticí** formy φ .

Definice. Necht' $\varphi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ je kvadratická forma. Řekneme, že φ je

- **pozitivně definitní** (PD), jestliže

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{u} \neq \mathbf{o}: \varphi(\mathbf{u}) > 0,$$

- **negativně definitní** (ND), jestliže

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{u} \neq \mathbf{o}: \varphi(\mathbf{u}) < 0,$$

- **pozitivně semidefinitní** (PSD), jestliže

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^n: \varphi(\mathbf{u}) \geq 0,$$

- **negativně semidefinitní** (NSD), jestliže

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^n: \varphi(\mathbf{u}) \leq 0,$$

- **indefinitní** (ID), neplatí-li nic z předchozího, tj.

$$\exists \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n: \varphi(\mathbf{u}) > 0 \wedge \varphi(\mathbf{v}) < 0.$$

Definice. Řekneme, že matice $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$ je **diagonální**, je-li $a_{ij} = 0$ pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$.

Věta 8.4. Necht' $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$ je diagonální. Pak platí:

- $\mathbb{A}$ je pozitivně definitní, právě když $a_{ii} > 0, i = 1, \dots, n$;
- $\mathbb{A}$ je negativně definitní, právě když $a_{ii} < 0, i = 1, \dots, n$;
- $\mathbb{A}$ je pozitivně semidefinitní, právě když $a_{ii} \geq 0, i = 1, \dots, n$;
- $\mathbb{A}$ je negativně semidefinitní, právě když $a_{ii} \leq 0, i = 1, \dots, n$;
- $\mathbb{A}$ je indefinitní, právě když existují $i, j \in \{1, \dots, n\}$ taková, že $a_{ii} > 0$ a $a_{jj} < 0$.

Definice. Symetrickou elementární úpravou matice $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ budeme rozumět úpravu, kdy provedeme jistou elementární řádkovou úpravu matice $\mathbb{A}$ a vzniklou matici upravíme odpovídající sloupcovou úpravou.

Symetrickou transformací matice $\mathbb{A}$ budeme rozumět konečnou posloupnost symetrických elementárních úprav.

Lemma 8.5. *Necht' T je transformace matic o m řádcích. Potom existuje regulární matice $\mathbb{B} \in M(m \times m)$ taková, že kdykoliv $\mathbb{A}' \in M(m \times n)$ vznikne z $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ pomocí T , tak platí $\mathbb{A}' = \mathbb{B}\mathbb{A}$.*

Obráceně, je-li $\mathbb{B} \in M(m \times m)$ regulární matice, pak existuje transformace T matic o m řádcích taková, že pro každou matici $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ platí $\mathbb{A} \xrightarrow{T} \mathbb{B}\mathbb{A}$.

———— Konec 8. přednášky, 20. 11. 2024 ————

Věta 8.6. *Uvažujme symetrickou transformaci T matic typu $n \times n$. Pak existuje regulární matice $\mathbb{B} \in M(n \times n)$ taková, že kdykoliv matice $\mathbb{A}' \in M(n \times n)$ vznikne z $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ pomocí T , tak platí $\mathbb{A}' = \mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{B}^T$.*

Lemma 8.7.

- (i) *Je-li $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ symetrická a $\mathbb{C} \in M(n \times n)$, pak $\mathbb{C}\mathbb{A}\mathbb{C}^T$ je opět symetrická matice.*
- (ii) *Symetrická transformace zachovává symetrii matice.*

Lemma 8.8. *Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je symetrická matice a $\mathbb{Q} \in M(n \times n)$ je regulární matice. Je-li $\mathbb{A}$ pozitivně definitní (resp. negativně definitní, pozitivně semidefinitní, negativně semidefinitní, indefinitní), pak je matice $\mathbb{Q}\mathbb{A}\mathbb{Q}^T$ pozitivně definitní (resp. negativně definitní, ...).*

Věta 8.9. *Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je symetrická matice a necht' $\mathbb{B} \in M(n \times n)$ vznikne z $\mathbb{A}$ pomocí symetrické transformace. Matice $\mathbb{A}$ je pozitivně definitní (resp. negativně definitní, pozitivně semidefinitní, negativně semidefinitní, indefinitní), právě když $\mathbb{B}$ je pozitivně definitní (resp. negativně definitní, ...).*

Věta 8.10. *Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je symetrická matice. Pak ji lze symetrickou transformací převést na diagonální matici.*

Věta 8.11 (Sylvestrovo kritérium). *Necht' $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1..n} \in M(n \times n)$ je symetrická. Matice $\mathbb{A}$ je*

- *pozitivně definitní, právě když pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ platí*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0;$$

- *negativně definitní, právě když pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ platí*

$$(-1)^k \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0;$$

- *pozitivně semidefinitní, právě když pro každou k -tici přirozených čísel $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, $k \in \{1, \dots, n\}$, platí*

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \dots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \dots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix} \geq 0;$$

- *negativně semidefinitní, právě když pro každou k -tici přirozených čísel $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, $k \in \{1, \dots, n\}$, platí*

$$(-1)^k \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \dots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \dots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix} \geq 0.$$

8.4 Vlastní čísla a vektory

Definice. Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Řekneme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ je **vlastní číslo** matice $\mathbb{A}$, jestliže existuje nenulový vektor $x \in \mathbb{C}^n$ takový, že $\mathbb{A}x = \lambda x$. Vektor x pak nazýváme **vlastním vektorem** matice $\mathbb{A}$ příslušným k vlastnímu číslu λ .

————— Konec 9. přednášky, 27. 11. 2024 —————

Věta 8.12. *Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times n)$.*

- (i) *Prvek $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem matice $\mathbb{A}$, právě když $\det(\lambda \mathbb{I} - \mathbb{A}) = 0$.*
- (ii) *Matice $\mathbb{A}$ má nejvýše n různých vlastních čísel.*

Definice. Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Funkce $\lambda \mapsto \det(\lambda \mathbb{I} - \mathbb{A})$ se nazývá **charakteristický polynom matice $\mathbb{A}$** . Vzhledem k tvrzení (i) předchozí věty definujeme **násobnost vlastního čísla matice** jako násobnost tohoto čísla jakožto kořene charakteristického polynomu.

Věta 8.13. *Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je symetrická. Pak jsou její vlastní čísla reálná.*

Definice. Řekneme, že matice $\mathbb{Q} \in M(n \times n)$ je **ortogonální**, jestliže platí $\mathbb{Q}^T \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \mathbb{Q}^T = \mathbb{I}$.

Věta 8.14 (spektrální rozklad matice). *Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je symetrická. Pak existuje ortogonální matice $\mathbb{Q} \in M(n \times n)$ taková, že*

$$\mathbb{Q}^T \mathbb{A} \mathbb{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice $\mathbb{A}$.

9 Taylorův polynom

9.1 Taylorův polynom reálné funkce

Definice. Necht' f je funkce, $a \in \mathbf{R}$ a funkce f má v bodě a vlastní n -tou derivaci. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovým polynomem funkce f v bodě a řádu n** .

Lemma 9.1. Necht' $n \in \mathbf{N}$, Q je polynom, $\text{st } Q \leq n$ a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$. Pak Q je nulový polynom.

————— Konec 10. přednášky, 4. 12. 2024 —————

Věta 9.2 (Peanův tvar zbytku). Necht' $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$ a funkce f má v bodě a vlastní n -tou derivaci. Potom

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Věta 9.3 (o jednoznačnosti). Necht' $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$, funkce f má v bodě a vlastní n -tou derivaci a P je polynom stupně nejvýše n splňující

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Potom $P = T_n^{f,a}$.

Definice. Necht' f a g jsou funkce, $a \in \mathbf{R}^*$. Řekneme, že funkce f je v bodě a **malé o od g** (píšeme $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$), jestliže platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Věta 9.4 (aritmetika malého o). Necht' $a \in \mathbf{R}^*$.

- (i) Jestliže $f_1(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$ a $f_2(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$, potom $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$.
- (ii) Jestliže $f_1(x) = o(g_1(x)), x \rightarrow a$ a $f_2(x) = o(g_2(x)), x \rightarrow a$, potom $f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x)), x \rightarrow a$.
- (iii) Jestliže $f_1(x) = o(g_1(x)), x \rightarrow a$ a f_2 je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu a , potom $f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)f_2(x)), x \rightarrow a$.
- (iv) Jestliže $f(x) = o(g_1(x)), x \rightarrow a$ a existuje vlastní $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$, potom $f(x) = o(g_2(x)), x \rightarrow a$.

(v) Jestliže $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$ a h je omezená na jistém prstencovém okolí bodu a , potom $h(x)f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$.

(vi) Jestliže $m, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $m \leq n$, a $f(x) = o((x-a)^n)$, $x \rightarrow a$, potom $f(x) = o((x-a)^m)$, $x \rightarrow a$.

Věta 9.5. Necht' $a, b \in \mathbf{R}^*$, $f(y) = o(g(y))$, $y \rightarrow b$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$ a existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(a, \delta): \varphi(x) \neq b.$$

Potom $f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x)))$, $x \rightarrow a$.

Věta 9.6 (Lagrangeův tvar zbytku). Necht' $n \in \mathbf{N}$, a dále necht' I je otevřený interval, $f \in C^{n+1}(I)$ a $a \in I$. Potom pro každé $x \in I$ existuje číslo $\xi \in \langle a, x \rangle$ splňující

$$f(x) = T_n^{f,a}(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

Definice. Necht' f je funkce, $a \in \mathbf{R}$ a funkce f má v bodě a derivace všech řádů. Potom řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovou řadou funkce f o středu a** . Ve speciálním případě $a = 0$ mluvíme o **MacLaurinově řadě**.

9.2 Taylorovy polynomy a řady elementárních funkcí

Věta 9.7. Pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí:

- $T_k^{\exp,0}(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k$,
- $T_{2k-1}^{\sin,0}(x) = T_{2k}^{\sin,0}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1}$,
- $T_{2k}^{\cos,0}(x) = T_{2k+1}^{\cos,0}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k}$,
- $T_k^{\log(1+y),0}(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{1}{k}x^k$,
- $T_k^{(1+y)^\alpha,0}(x) = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k$, kde $\alpha \in \mathbf{R}$, $\binom{\alpha}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}$.

Věta 9.8. Pro každé $x \in \mathbf{R}$ jsou funkce $\exp$, $\sin$ a $\cos$ součtem své Taylorovy řady o středu 0. Platí tedy:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbf{R}: \exp x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \\ \forall x \in \mathbf{R}: \sin x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}, \\ \forall x \in \mathbf{R}: \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}. \end{aligned}$$

Věta 9.9. Platí

$$\forall x \in (-1, 1): \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,$$

$$\forall x \in (-1, 1): (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

9.3 Taylorův polynom 2. řádu funkce více proměnných

Definice. Necht' $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\mathbf{a} \in G$ a $f \in C^2(G)$. Definujme funkci $T_2^{f,\mathbf{a}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$T_2^{f,\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j).$$

Tuto funkci nazýváme **Taylorovým polynomem druhého řádu funkce f v bodě $\mathbf{a}$** .

Věta 9.10. Necht' $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\Delta > 0$ a $f \in C^2(B(\mathbf{a}, \Delta))$. Potom existuje funkce $\omega: B(\mathbf{a}, \Delta) \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že

$$\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \Delta): f(\mathbf{x}) = T_2^{f,\mathbf{a}}(\mathbf{x}) + \omega(\mathbf{x}) \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2$$

a platí

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \omega(\mathbf{x}) = 0.$$

10 Extrémy funkcí více proměnných

Věta 10.1 (postačující podmínky druhého řádu). Budiž $f \in C^2(G)$, $\mathbf{a} \in G$ a necht' $\mathbf{a}$ je stacionárním bodem funkce f . Potom platí:

- Je-li $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ negativně definitní, nabývá f v bodě $\mathbf{a}$ ostrého lokálního maxima.
- Je-li $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ pozitivně definitní, nabývá f v bodě $\mathbf{a}$ ostrého lokálního minima.
- Je-li $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ indefinitní, nenabývá f v bodě $\mathbf{a}$ ani lokálního maxima, ani lokálního minima.

Věta 10.2. Budiž $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená konvexní množina a $f \in C^2(G)$. Potom je funkce f na množině G konkávní, právě když pro všechna $\mathbf{x} \in G$ je matice $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ negativně semidefinitní.

Věta 10.3. Necht' G je otevřená konvexní podmnožina $\mathbb{R}^n$, $f \in C^2(G)$ a $\mathbf{a} \in G$. Necht' platí

- $\forall \mathbf{x} \in G: \nabla^2 f(\mathbf{x})$ je negativně semidefinitní,
- $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Potom funkce f nabývá v bodě $\mathbf{a}$ svého maxima na množině G .

Seznam definic

K = klíčový pojem

K zobecněný Riemannův integrál

- konvergentní Riemannův integrál
- divergentní Riemannův integrál
- částečný součet řady
- člen řady
- součet řady
- konvergentní řada
- divergentní řada
- absolutně konvergentní řada
- přerovnání řady
- vektorový prostor
- vektorový podprostor

K lineární kombinace

- triviální lineární kombinace
- netriviální lineární kombinace
- lineárně závislé vektory

K lineárně nezávislé vektory

- lineárně nezávislá množina
- báze prostoru
- dimenze vektorového prostoru
- lineární zobrazení
- jádro lineárního zobrazení

- symetrická matice

K kvadratická forma

- typ kvadratické formy
- symetrická elementární úprava
- symetrická transformace
- diagonální matice

K vlastní číslo

K vlastní vektor

- charakteristický polynom
- násobnost vlastního čísla
- ortogonální matice

K Taylorův polynom

- symbol malé o
- Taylorova řada
- Taylorův polynom druhého řádu pro funkce více proměnných

Seznam vět

B = věta bez důkazu

- spojitost Riemannova integrálu (Lemma 6.20)

B vlastnosti zobecněného Riemannova integrálu (Věta 6.24)

B linearita zobecněného Riemannova integrálu (Věta 6.25)

B monotonie zobecněného Riemannova integrálu (Věta 6.26)

B srovnávací kritérium (Věta 6.27)

B limitní srovnávací kritérium (Věta 6.28)

B Newtonova-Leibnizova formule pro zobecněný Riemannův integrál (Věta 6.29)

- nutná podmínka konvergence řady (Věta 7.1)
- srovnávací kritérium (Věta 7.2)
- limitní srovnávací kritérium (Věta 7.3)
- Cauchyovo odmocninové kritérium (Věta 7.4)

B d'Alembertovo kritérium (Věta 7.5)

- konvergence řady $\sum 1/n^\alpha$ (Věta 7.6)

B Leibnizovo kritérium (Věta 7.7)

- vztah konvergence a absolutní konvergence (Věta 7.8)

B přerovnání absolutně konvergentní řady (Věta 7.9)

B existence báze (Věta 8.1)

B báze konečněrozměrného prostoru (Věta 8.2)

- vlastnosti Ker a Im (Věta 8.3)
- typ diagonální matice (Věta 8.4)
- transformace a násobení (Lemma 8.5)
- symetrická transformace a násobení (Věta 8.6)

- vlastnosti symetrické matice (Lemma 8.7)

- typ matice a násobení (Lemma 8.8)

- zachovávání typu matice (Věta 8.9)

B diagonalizace matice (Věta 8.10)

B Sylvestrovo kritérium (Věta 8.11)

B vlastnosti vlastních čísel (Věta 8.12)

- vlastní čísla symetrické matice (Věta 8.13)

B spektrální rozklad matice (Věta 8.14)

- Peanův tvar zbytku (Věta 9.2)

- jednoznačnost Taylorova polynomu (Věta 9.3)

- aritmetika malého o (Věta 9.4)

- skládání funkcí a malé o (Věta 9.5)

B Lagrangeův tvar zbytku (Věta 9.6)

- Taylorovy polynomy elementárních funkcí (Věta 9.7)

- Taylorovy řady sinu, cosinu a exponenciály (Věta 9.8)

B Taylorovy řady $\log(1 + x)$ a $(1 + x)^\alpha$ (Věta 9.9)

- aproximace funkce více proměnných Taylorovým polynomem (Věta 9.10)

B postačující podmínky druhého řádu (Věta 10.1)

B charakterizace konkávnosti (Věta 10.2)

B existence extrému (Věta 10.3)