I. KONVERGENCE LEBESGUEOVA INTEGRÁLU

Určete, zda Lebesgueovy integrály existují a zda jsou konvergentní:

1. a) $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_0^1 \frac{1}{\log x}\,\mathrm{d}x$ e) $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^k}\,\mathrm{d}x$ $(k\in\mathbb{R})$

f) $\int_1^\infty \sin^2\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ g) $\int_0^1 (\log x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ h) $\int_0^{\pi/2} \frac{\log(\sin x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ i) $\int_{-1}^1 \cos\left(\sin\frac{1}{x}+e^{\frac{1}{x}}\right)\mathrm{d}x$

2. Příklady s parametrem ($\alpha,\beta\in\mathbb{R}$): a) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_2^\infty \frac{(\log x)^\beta}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^{1/2} x^\alpha|\log x|^\beta\,\mathrm{d}x$

d) $\int_0^1 \frac{\log(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ e) $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}-x^{\beta-1}}{1-x}\,\mathrm{d}x$ $(\alpha>\beta)$ f) $\int_0^\pi \log(\sin\alpha x)\,\mathrm{d}x$

g) $\int_0^{\pi/2}(\tan x)^\alpha\,\mathrm{d}x$ h) $\int_0^1 x^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$ i) $\int_0^\infty(\pi-2\arctan x)^\alpha\,\mathrm{d}x$ j) $\int_0^1 \frac{\arccos x}{\log^\alpha(1/x)}\,\mathrm{d}x$

II. INTEGRACE POSLOUPNOSTÍ A ŘAD FUNKCÍ

1. Spočtěte následující limity posloupností: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\sqrt[n]{x}}\,\mathrm{d}x$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\log(x+n)}{n}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\log\left(\frac{n-1}{n}-\sin x\right)}\,\mathrm{d}x$

2. Spočtěte následující limity: a) $\lim\limits_{a\to\infty}\int_0^\infty e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$ b) $\lim\limits_{a\to 0+}\int_0^\infty e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$

c) $\lim\limits_{a\to 1^-}\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\log(a-\sin x)}\,\mathrm{d}x$ d) $\lim\limits_{a\to\infty}\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ e) $\lim\limits_{a\to\infty}\int_0^\infty e^{-ax}\sin x\,\mathrm{d}x$

3. V následujících příkladech rozviňte integrovanou funkci v řadu, ověřte možnost záměny řady a integrálu a vyjádřete integrál jako číselnou řadu.

a) $\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_0^\infty \frac{x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$ e) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$ $(p,q>0)$

f) $\int_0^\infty e^{-x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ g) $\int_0^\infty \log x\log(1-x)\,\mathrm{d}x$ h) $\int_0^\infty \log x\log(1+x)\,\mathrm{d}x$ i) $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$ $(a\in\mathbb{R})$

j) $\int_0^1 \frac{|\log x|}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ k) $\int_0^1 \frac{x^2|\log x|}{1+x}$ l) $\int_0^\infty \log(1-e^{-x})\,\mathrm{d}x$ m) $\int_0^1 \frac{e^x-1}{x}\,\mathrm{d}x$ n) $\int_0^1 \frac{1+x}{1-x}|\log x|\,\mathrm{d}x$ o) $\int_0^\infty \frac{1}{e^{8x}+1}\,\mathrm{d}x$

III. INTEGRÁLY ZÁVISLÉ NA PARAMETRU

1. Určete definiční obor následujících reálných funkcí (= množinu všech $a\in\mathbb{R}$, že $F(a)\in\mathbb{R}$) a dokažte, že jsou na svém definičním oboru spojité.

a) $F(a)=\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ b) $F(a)=\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{d}x$ c) $F(a)=\int_{-1}^1\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$ d) $F(a)=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x$

e) $F(a)=\int_0^\infty \frac{x}{2+x^a}\,\mathrm{d}x$ f) $F(a)=\int_{1/2}^\infty \frac{\cos x}{x^a}\,\mathrm{d}x$ g) $F(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ h) $F(a)=\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$

i) $F(a)=\int_1^\infty \frac{\sin 1/x}{x(x+a)^2}\,\mathrm{d}x$ j) $F(a)=\int_0^1 \frac{x^a}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ k) $F(a)=\int_0^1\log(x^2+a^2)\,\mathrm{d}x$ l) $F(a)=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-ax}\,\mathrm{d}x$

2. Rozhodněte, pro které hodnoty parametrů konvergují následující Lebesgueovy integrály a spočtěte jejich hodnoty pomocí věty o derivování integrálů závislých na parametru.

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{1-e^{-ax}}{xe^x}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{1-e^{-ax^2}}{xe^{x^2}}\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int_0^1\frac{1-x^a}{\log x}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}\,\mathrm{d}x$ g) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\operatorname{arctg}(ax)-\operatorname{arctg}(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int_0^\pi\frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\,\mathrm{d}x$ i) $\displaystyle\int_0^1\frac{\log(1-a^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ j) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{arctg}(a\sin x)}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ k) $\displaystyle\int_0^1\frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

l) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\log(a^2+x^2)}{b^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ m) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\frac{1-\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$

IV. VÍCEROZMĚRNÁ INTEGRACE

1. Spočtěte míru $\lambda_2(M)$ množiny M (nepoužívejte větu o substituci)

a) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \le x \le 5,\ y \le 3,\ xy \ge 1\}$ b) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ x > 2,\ 0 < y < 1/x^2\}$
c) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ x > 2,\ 0 < y < 1/x\}$
d) M je omezená křivkami: $2x - y = 0, \quad 2x - y - 7 = 0, \quad x - 4y + 7 = 0, \quad x - 4y + 14 = 0$
e) M je omezená křivkami: $x = \frac{y^2+b^2}{2b}, \quad x = \frac{y^2+a^2}{2a} \quad (0 < b < a)$

2. Spočtěte $\int\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^2$ (nepoužívejte větu o substituci)

a) $M = [0,1] \times [0,1]; \qquad f(x,y) = \frac{x^2}{1+y^2}$
b) M je ohraničená křivkami $y = 0$, $y = 1 - x$, $y = 1 + x$; $\qquad f(x,y) = x^2 + y^2$
c) M je ohraničená křivkami $y = x^2$, $y^2 = x$; $\qquad f(x,y) = x^2 + y$
d) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le R^2\} \quad (R > 0); \qquad f(x,y) = y^2\sqrt{R^2 - x^2}$
e) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le x\}; \qquad f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y^2+x^2}}$
f) M je ohraničená křivkami $y = 0$, $x = 1$, $y = x$; $\qquad f(x,y) = \sqrt{4x^2 - y^2}$

3. Spočtěte $\int\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^2$

a) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 1\}; \qquad f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$
b) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le x\}; \qquad f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y^2+x^2}}$
c) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \le \frac{x^2 y}{c^3},\ x \ge 0,\ y \ge 0\} \quad (a,b,c > 0); \qquad f(x,y) = xy$
d) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}; \qquad f(x,y) = \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$
e) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ \left(\frac{(x+2)^2}{2} + \frac{y^2}{3}\right)^4 \le \frac{(x+2)y}{6}\}; \qquad f(x,y) = \sqrt{xy + 2y}$

4. Spočtěte míru $\lambda_2(M)$ množiny M (v úlohách uvažujte všechny parametry kladné)

a) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ (x^2 + y^2)^2 \le 2a^2(x^2 - y^2)\}$ (obsah plochy ohraničené lemniskátou)
b) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ (x^2 + y^2)^3 < a^2(x^4 + y^4)\}$
c) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le R^2,\ x^2 + y^2 \le 2Ry,\ x \ge 0\}$
d) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ 2 < x + y < 3,\ x < y < 3x\}$ e) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ (x+y)^3 < axy,\ x > 0,\ y > 0\}$
f) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ a < xy < b,\ py < x < qy \quad (0 < a < b,\ 0 < p < q)$
g) M je ohraničená křivkou $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = x^2 + y^2$

5. Pomocí Fubiniovy věty spočtěte hodnoty následujících Lebesgueových integrálů
(můžete používat tzv. Laplaceův integál, tj. $\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}/2$)

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx)}{x}\,\mathrm{d}x \quad (ab > 0)$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a \ge 0, b \ge 0)$
c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\,\mathrm{d}x \quad (a > 0, b > 0)$ d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x \quad (a > 0, b > 0)$
e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1 + a^2x^2) - \log(1 + b^2x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a, b \in \mathbb{R})$ f) $\displaystyle\int_0^\infty (e^{-a^2/x^2} - e^{-b^2/x^2})\,\mathrm{d}x \quad (a, b \in \mathbb{R})$
g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{d}x \quad (a > -1,\ b > -1)$

6. Spočtěte míru $\lambda_3(M)$ množiny M(v úlohách uvažujte všechny parametry kladné)

a) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \le 2az,\ x^2 + y^2 \le z^2\}$
b) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ (x + y + z)^2 < ay,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$

c) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2,\ x^2+y^2 \leq Rx\}$ (objem Vivianiho okénka)
d) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ (R-\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2 \leq a^2\},\ R > a$ (objem anuloidu)
e) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2 \leq \frac{x^2y}{h^3}\}$
f) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ c(x^2+y^2)+a^2z \leq a^2c,\ z \geq 0\}$
g) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ \frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3} \leq \frac{1}{x^2+2x+3}\}$ (příklad ze zkouškové písemky v akademickém roce 2009/10)

7. Spočtěte $\int\int\int_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}\lambda^3$ (v úlohách uvažujte všechny parametry kladné)

a) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2,\ x^2+y^2+z^2 \leq 2Rz\}$; $f(x,y,z) = z^2$
b) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$; $f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$
c) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \leq 3z,\ x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$; $f(x,y,z) = z$
d) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \leq z\}$; $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$