

Miroslav Zelený

Deskriptivní teorie množin I

- Text k výběrové přednášce -

5. února 2014

Obsah

Předmluva	5
Kapitola 1. Polské prostory	1
1.1. Definice a základní vlastnosti	1
1.2. Další vlastnosti polských prostorů	1
1.3. Baireův prostor ω^ω	3
1.4. Cantorův prostor 2^ω	4
1.5. Hilbertova krychle $[0, 1]^\omega$	4
1.6. Prostor kompaktních množin $\mathcal{K}(X)$	5
1.7. Rozšiřování spojitých zobrazení	7
1.8. Cvičení	8
Kapitola 2. Základní vlastnosti borelovských a analytických množin	9
2.1. Zavedení borelovské hierarchie a její vlastnosti	9
2.2. Analytické množiny a jejich vlastnosti	11
2.3. Luzinova věta	12
2.4. Suslinova operace	13
2.5. Obrazy a vzory při borelovských zobrazeních	14
2.6. Standardní borelovské prostory	16
Kapitola 3. Regularita analytických množin	19
3.1. Množiny s Baireovou vlastností	19
3.2. Soleckého věta	21
Kapitola 4. Nekonečné hry a jejich použití	25
4.1. Základní definice	25
4.2. Příklady her	26
4.3. Determinovanost her	27
4.4. Perfect Set Theorem a nekonečné hry	28

Předmluva

Následující text je mírně upraveným přepisem mých příprav k výběrové přednášce *Deskriptivní teorie množin I* a bude ještě dále upravován. Nejedná se tedy o skripta, neboť tato by vyžadovala řadu podstatných doplnění. Přesto snad tento text bude pomoci při absolvování výběrové přednášky v zimním semestru 2013/14.

Výklad se opírá zejména o [?].

M. Z.

Polské prostory

1.1. Definice a základní vlastnosti

Definice 1.1.1. Řekneme, že topologický prostor (X, τ) je **polský**, jestliže je separabilní a metrizable (metrizovatelný) úplnou metrikou.

Klasická deskriptivní teorie množin je část matematiky, která se zabývá „definovatelnými“ množinami a zobrazeními v rámci polských prostorů.

Poznámka 1.1.2.

- ▶ Polský prostor je vždy dvojice (množina, topologie), zpravidla ale budeme říkat jen „polský prostor X “.
- ▶ Úplná metrika na polském prostoru kompatibilní s jeho topologií není určena jednoznačně.
- ▶ Termín zavedl R. Godement ze skupiny Bourbaki. Používal ho však pro prostory metrické nikoliv topologické metrizable.

Příklad 1.1.3 (příklady polských prostorů).

- ▶ $\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{R}^n, \mathbf{C}^n$ s obvyklými topologiemi
- ▶ $2 := \{0, 1\}, \omega := \{0, 1, 2, \dots\}$, s diskretními topologiemi
- ▶ separabilní Banachovy prostory
- ▶ metrizable kompaktní prostory

Věta 1.1.4 (Baireova věta). Necht X je topologický prostor metrizable úplnou metrikou. Potom průnik spočetně mnoha hustých otevřených množin v X je hustý v X . Tvrzení speciálně platí pro X polský.

8.4

Bez důkazu.

Věta 1.1.5. Necht X je úplný metrický prostor a $(F_n)_{n \in \omega}$ je posloupnost neprázdných uzavřených podmnožin X splňující

- $\forall n \in \omega : F_{n+1} \subset F_n,$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } F_n = 0.$

Potom existuje $x \in X$ takové, že $\bigcap_{n \in \omega} F_n = \{x\}.$

Bez důkazu

1.2. Další vlastnosti polských prostorů

Věta 1.2.1.

3.3, 3.11

- (i) Necht $X_n, n \in \omega$, jsou polské. Pak $\prod_{n \in \omega} X_n$ (se součinovou topologií) je polský.

- (ii) Necht X je polský. Podprostor $H \subset X$ je polský právě tehdy, když H je typu G_δ v X , tj. $H = \bigcap_{n \in \omega} V_n$, kde V_n jsou otevřené množiny v X .

Důkaz. (i) Necht d_n je úplná kompatibilní metrika na X_n , $n \in \omega$. Metriku d na $X := \prod_{n \in \omega} X_n$ definujeme takto

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \min\{2^{-n}, d_n(x_n, y_n)\}, \quad x = (x_n), y = (y_n).$$

Ověření požadovaných vlastností je pak standardní i když ne krátkou záležitostí.

- (ii) Pokud $H = \emptyset$ nebo $H = X$, pak tvrzení zřejmě platí. Budeme tedy v dalším předpokládat, že H je neprázdná vlastní podmnožina X .

$\Rightarrow$ Necht ρ je úplná metrika na H . Pro $n \in \omega$ položme

$$V_n = \bigcup \{V \subset X; V \text{ je otevřená v } X, V \cap H \neq \emptyset, \text{diam}_\rho(V \cap H) < 2^{-n}\}.$$

Ukážeme, že platí

$$H = \bigcap_{n \in \omega} (V_n \cap \overline{H}).$$

Inkluzi $\subseteq$ je snadné dokázat. Odvodíme inkluzi obrácenou. Pokud $x \in V_n \cap \overline{H}$ pro každé $n \in \omega$, tak existuje posloupnost G_n otevřených množin taková, že $x \in G_{n+1} \subset G_n$ a $\text{diam}_\rho(G_n \cap H) < 2^{-n}$. Označme $\{y\} = \bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n \cap H}^H$. Pokud by $x \neq y$, pak existuje otevřená množina $O \subset X$ taková, že $y \in O$ a $x \notin \overline{O}$. Nalezneme $n \in \omega$ takové, že $G_n \cap H \subset O$. Na druhé straně ale $G_n \cap (X \setminus \overline{O}) \cap H \neq \emptyset$, neboť $x \in G_n \cap (X \setminus \overline{O}) \cap \overline{H}$. To je ale spor.

Množina H je tedy spočetným průnikem G_δ množin, a tedy G_δ .

$\Leftarrow$ Necht d je úplná metrika na X a $H = \bigcap_{n \in \omega} U_n$, kde $\emptyset \neq U_n \subsetneq X$ jsou otevřené v X . Položme $F_n = X \setminus U_n$ a

$$\tilde{d}(x, y) = d(x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} \min \left\{ 2^{-n}, \left| \frac{1}{d(x, F_n)} - \frac{1}{d(y, F_n)} \right| \right\}, \quad x, y \in H.$$

Funkce $\tilde{d}$ je metrika. Funkce je korektně definována, je symetrická a zřejmě $\tilde{d}(x, y) = 0$ právě tehdy, když $x = y$. Pokud jde o trojúhelníkovou nerovnost, tato snadno plyne z nerovnosti

$$\left| \frac{1}{d(x, F_n)} - \frac{1}{d(y, F_n)} \right| \leq \left| \frac{1}{d(x, F_n)} - \frac{1}{d(z, F_n)} \right| + \left| \frac{1}{d(z, F_n)} - \frac{1}{d(y, F_n)} \right|, \quad x, y, z \in H.$$

Metrika $\tilde{d}$ je ekvivalentní s d . Pokud $x_j \xrightarrow{d} x$, pak platí $d(x_j, F_n) \rightarrow d(x, F_n)$ pro každé $n \in \omega$. Odtud a z definice $\tilde{d}$ již snadno plyne $x_j \xrightarrow{\tilde{d}} x$. Pokud $x_j \xrightarrow{\tilde{d}} x$, pak zřejmě $x_j \xrightarrow{d} x$.

Prostor $(H, \tilde{d})$ je úplný. Necht (x_i) je cauchyovská v $(H, \tilde{d})$. Potom (x_i) je cauchyovská v (X, d) a existuje $x \in X$ takové, že $x_i \rightarrow x$. Pro každé $n \in \omega$ je posloupnost $(1/d(x_i, F_n))_i$ cauchyovská, a tedy konvergentní v $\mathbf{R}$. Odtud již snadno plyne $x \in H$ a $x_i \xrightarrow{\tilde{d}} x$.

Prostor $(H, \tilde{d})$ je separabilní. Zřejmé. ■

Označení 1.2.2. Necht A je neprázdná množina. Symbol $A^{<\omega}$ značí množinu všech konečných posloupností prvků z A (včetně prázdné). Je-li $s = (s_0, \dots, s_{k-1}) \in A^k \subset A^{<\omega}$ a $t = (t_0, t_1, \dots) \in A^{<\omega} \cup A^\omega$, pak **spojení** posloupností s a t definujeme jako

$$s \wedge t := (s_0, \dots, s_{k-1}, t_0, t_1, \dots).$$

Délkou posloupnosti $s \in A^\omega$ rozumíme počet členů s ; značíme $|s|$. Necht $s \in A^{<\omega} \cup A^\omega$. Potom $s|k$ značí restrikci s na $k \in \omega$, přičemž $|s| \geq k$ nebo $s \in A^\omega$.

Je-li $s \in A^{<\omega}$ a $t \in A^{<\omega} \cup A^\omega$, říkáme, že t **prodlužuje** s , jestliže $s = t| |s|$; značíme $s < t$.

1.3. Baireův prostor ω^ω

Na prostoru ω^ω uvažujeme součinovou topologii, přičemž na ω máme topologii diskrétní. Necht $s \in \omega^{<\omega}$. Pak označíme

$$\mathcal{N}(s) = \{v \in \omega^\omega; |s| = |t| \text{ \& } s < v\};$$

jde o takzvaný **Baireův interval**.

Platí:

- Množina $\mathcal{N}(s)$, $s \in \omega^{<\omega}$, je obojetná, tj. otevřená i uzavřená. Platí totiž

$$\omega^\omega \setminus \mathcal{N}(s) = \bigcup \{ \mathcal{N}(t); |t| = |s|, s \neq t \}.$$

- Přímou z definice součinové topologie plyne, že systém $\{\mathcal{N}(s); s \in \omega^{<\omega}\}$ tvoří bázi ω^ω .

Věta 1.3.1 (Alexandrov-Urysohn). Prostor ω^ω je až na homeomorfismus jediným neprázdným nuldimenzionálním polským prostorem, jehož všechny kompaktní množiny mají prázdný vnitřek.

7.7

Bez důkazu.

Důsledek 1.3.2. Prostor ω^ω je homeomorfní s prostorem $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

Věta 1.3.3. Necht X je neprázdný polský prostor. Pak existuje spojitě zobrazení ω^ω na X .

Důkaz. Necht ρ je úplná metrika na X splňující $\text{diam}_\rho X \leq 1$. Zkonstruujeme neprázdné uzavřené množiny F_s , $s \in \omega^{<\omega}$, takové, že

- (1) $F_\emptyset = X$,
- (2) $\forall s \in \omega^{<\omega} : \text{diam } F_s \leq 2^{-|s|}$,
- (3) $\forall s \in \omega^{<\omega} : \bigcup_{n \in \omega} F_{s \wedge n} = F_s$.

Konstrukce systému $\{F_s; s \in \omega^{<\omega}\}$.

- $s = \emptyset$: Položíme $F_\emptyset = X$.

• Předpokládejme, že F_s již máme, a chceme zkonstruovat $F_{s \wedge n}$ pro $n \in \omega$. Prostor X je separabilní, a proto F_s je separabilní. Nalezneme množinu¹ $\{x_n; n \in \omega\}$ hustou v F_s . Položíme

$$F_{s \wedge n} := F_s \cap \overline{B}(x_n, 2^{-(|s|+2)}).$$

Tím je konstrukce provedena a (1)-(3) zřejmě platí.

Definice zobrazení φ . Definujme hledané $\varphi : \omega^\omega \rightarrow X$ takto

$$\{\varphi(\alpha)\} = \bigcap_{n \in \omega} F_{\alpha|n}.$$

¹Množina $\{x_n; n \in \omega\}$ může být i jednoprvková.

Korektnost definice φ . Posloupnost $(F_{\alpha|n})_n$ je tvořena do sebe zařazenými uzavřenými množinami splňujícími $\text{diam } F_{\alpha|n} \rightarrow 0$ (vlastnost (2)). Podle Věty 1.1.5 je množina $\bigcap_{n \in \omega} F_{\alpha|n}$ jednoprvková.

Spojitosť φ . Necht $\alpha \in \omega^\omega$ a $\varepsilon > 0$. Platí $\varphi(\mathcal{N}(\alpha|k)) \subset F_{\alpha|k}$ pro každé $k \in \omega$. Pro $k \in \omega$ splňující $2^{-k} < \varepsilon$, pak máme

$$\text{diam } \varphi(\mathcal{N}(\alpha|k)) \leq \text{diam } F_{\alpha|k} \leq 2^{-k} < \varepsilon.$$

Surjektivita φ . Je-li $s \in \omega^{<\omega}$ a $x \in F_{s|n}$, pak podle (3) existuje $n \in \omega$ takové, že $x \in F_{s \wedge n}$. Pro libovolné $x \in X$ tedy existuje $\alpha \in \omega^\omega$ takové, že $x \in F_{\alpha|k}$ pro všechna $k \in \omega$. Pak máme $\varphi(\alpha) = x$. ■

1.4. Cantorův prostor 2^ω

Prostor 2^ω je opatřen součinnovou topologií. Jedná se o kompaktní, nuldimenzionální prostor, který je také polský.

7.4

Věta 1.4.1 (Brouwer). Cantorův prostor 2^ω je až na homeomorfismus jediným neprázdným nuldimenzionálním kompaktním metrizovatelným prostorem bez izolovaných bodů.

Bez důkazu.

Věta 1.4.2. Necht X je neprázdný metrizovatelný kompaktní prostor. Pak existuje spojitě zobrazení 2^ω na X .

Důkaz lze provést podobně jako důkaz Věty 1.3.3.

1.5. Hilbertova krychle $[0, 1]^\omega$

Prostor $[0, 1]^\omega$ je opatřen součinnovou topologií, přičemž na $[0, 1]$ uvažujeme obvyklou topologii. Prostor $[0, 1]^\omega$ je kompaktní metrizovatelný, a tedy polský.

4.14

Věta 1.5.1. Každý polský prostor je homeomorfní G_δ podmnožině $[0, 1]^\omega$.

Důkaz. Necht X je polský a neprázdný, případ $X = \emptyset$ je triviální. Zvolme úplnou kompatibilní metriku ρ na X splňující $\text{diam}_\rho X \leq 1$. Nalezneme spočetnou hustou množinu $\{x_n; n \in \omega\}$ v X . Definujme $f : X \rightarrow [0, 1]^\omega$ takto:

$$f(x) = (\rho(x, x_n))_{n \in \omega}.$$

Korektnost definice a spojitost f . Zřejmé.

Injektivita f . Pokud $x \neq y$, pak existuje $n \in \omega$ takové, že $\rho(x, x_n) < \rho(y, x_n)$, a tedy $f(x) \neq f(y)$.

Spojitosť f^{-1} . Necht $f(y^n) \rightarrow f(y)$. Máme ukázat, že také $y^n \rightarrow y$. Víme, že $\rho(y^n, x_k) \rightarrow \rho(y, x_k)$ pro každé $k \in \omega$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existuje $k \in \omega$ takové, že $\rho(y, x_k) < \varepsilon/3$. Pro jisté $n_0 \in \omega$ platí

$$\forall n \in \omega, n \geq n_0 : \rho(y^n, x_k) < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Pak máme

$$\forall n \in \omega, n \geq n_0 : \rho(y^n, y) \leq \rho(y^n, x_k) + \rho(x_k, y) < \varepsilon.$$

Množina $f(X)$ je G_δ . Prostor $f(X)$ je homeomorfní s X , a je tedy polský. Podle Věty 1.2 je $f(X)$ typu G_δ v $[0, 1]^\omega$. ■

1.6. Prostor kompaktních množin $\mathcal{K}(X)$

Nechť X je polský. Označme

$$\mathcal{K}(X) = \{K \subset X; K \text{ je kompaktní}\}.$$

Victorisova topologie na $\mathcal{K}(X)$ je generována množinami tvaru

$$\{K \in \mathcal{K}(X); K \cap V \neq \emptyset\} \quad \text{a} \quad \{K \in \mathcal{K}(X); K \subset V\},$$

kde $V \subset X$ je otevřená.

Poznámka 1.6.1. Množiny tvaru

$$\{K \in \mathcal{K}(X); K \subset V_0, K \cap V_i \neq \emptyset, i = 1, \dots, n\},$$

kde $n \in \omega$, $V_0, V_1, \dots, V_n$ jsou otevřené podmnožiny X , tvoří bázi Vietorisovy topologie.

Věta 1.6.2. Nechť X je polský a ρ je kompatibilní úplná metrika na X splňující $\text{diam}_\rho X \leq 1$. Pak zobrazení $h : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \rightarrow [0, +\infty)$ definované předpisem

$$h(K, L) = \begin{cases} \max\{\sup_{x \in K} \rho(x, L), \sup_{y \in L} \rho(y, K)\}, & K \neq \emptyset, L \neq \emptyset; \\ 0, & K = L = \emptyset; \\ 1, & \text{jinak;} \end{cases}$$

je úplná metrika na $\mathcal{K}(X)$ kompatibilní s Vietorisovou topologií. Tato metrika se nazývá **Hausdorffova**.

Důkaz. Zobrazení h je metrika. Stačí ověřit trojúhelníkovou nerovnost, korektnost a ostatní vlastnosti jsou zřejmé. Nechť $K, L, P \in \mathcal{K}(X)$. Pokud je některý z kompakťů K, L, P prázdný, pak zřejmě

$$h(K, L) \leq h(K, P) + h(P, L). \quad (1)$$

Dokážeme (1) i pro případ neprázdných kompakťů. Nechť $x \in K$, $y \in L$ a $p \in P$. Postupně odhadujeme:

$$\rho(x, L) \leq \rho(x, y) \leq \rho(x, p) + \rho(p, y),$$

$$\rho(x, L) \leq \rho(x, p) + \rho(p, L),$$

$$\rho(x, L) \leq \rho(x, p) + h(P, L),$$

$$\rho(x, L) \leq h(K, P) + h(P, L).$$

Odtud již snadno plyne dokazovaná nerovnost.

Kompatibilita s Vietorisovou topologií. Označme Vietorisovu topologii jako $\mathcal{V}$ a topologii indukovanou Hausdorffovou metrikou jako $\mathcal{H}$. Chceme dokázat $\mathcal{H} = \mathcal{V}$.

Inkluze $\mathcal{H} \subset \mathcal{V}$. Zvolme $K \in \mathcal{K}(X)$ a $\varepsilon > 0$. Množina K je kompaktní, takže můžeme nalézt konečný systém $\mathcal{B}$ otevřených koulí protínajících K s diametrem menším než ε , který pokrývá K . Potom platí

$$B_h(K, \varepsilon) \supset \{L \in \mathcal{K}(X); L \subset \bigcup \mathcal{B} \text{ a } \forall B \in \mathcal{B} : L \cap B \neq \emptyset\} \ni K.$$

Inkluze $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}$. Necht $V \subset X$ je otevřená a $K \in \mathcal{K}(X)$ splňuje $K \cap V \neq \emptyset$. Zvolme $x \in K \cap V$ a k němu nalezneme $\varepsilon > 0$ takové, že $B(x, \varepsilon) \subset V$. Potom

$$B_h(K, \varepsilon) \subset \{L \in \mathcal{K}(X); L \cap V \neq \emptyset\}.$$

Nyní necht $V \subset X$ je otevřená a $K \in \mathcal{K}(X)$, $K \neq \emptyset$, splňuje $K \subset V$. Nalezneme $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\{y \in X; \rho(y, K) < \varepsilon\} \subset V.$$

Potom platí

$$B_h(K, \varepsilon) \subset \{L \in \mathcal{K}(X); L \subset V\}.$$

Pro $K = \emptyset$ stačí položit $\varepsilon = 1/2$.

Separabilita $\mathcal{K}(X)$. Nalezneme $D \subset X$ spočetnou a hustou. Položme

$$\mathcal{D} := \{K \in \mathcal{K}(X); K \text{ je konečná a } K \subset D\}.$$

Množina $\mathcal{D}$ je spočetná. Jestliže $V_0, V_1, \dots, V_n$ jsou otevřené podmnožiny X takové, že

$$\mathcal{G} := \{K \in \mathcal{K}(X); K \subset V_0 \text{ a } K \cap V_i \neq \emptyset, i = 1, \dots, n\}$$

je neprázdná, pak pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ zvolme $x_i \in V_0 \cap V_i \cap D$ a položme $L := \{x_1, \dots, x_n\}$. Potom $L \in \mathcal{G} \cap \mathcal{D}$, takže $\mathcal{D}$ je hustá v $\mathcal{K}(X)$.

Úplnost $(\mathcal{K}(X), h)$. Necht (K_n) je cauchyovská posloupnost v $(\mathcal{K}(X), h)$. Položme

$$K := \bigcap_{n \in \omega} \overline{\bigcup_{j \geq n} K_j}.$$

Odvodíme:

- (1) $K \in \mathcal{K}(X)$,
- (2) $K_n \rightarrow K$.

(1) Stačí ukázat, že množina $\bigcup_{n \in \omega} K_n$ je totálně omezená, pak je totiž množina $\overline{\bigcup_{n \in \omega} K_n}$ kompaktní. Vezměme $\varepsilon > 0$. Pak existuje $n_0 \in \omega$ takové, že

$$\forall n \in \omega, n \geq n_0 : h(K_n, K_{n_0}) < \varepsilon/2.$$

Necht S je konečná $\varepsilon/2$ -sít v K_{n_0} . Potom

$$\bigcup_{n \geq n_0} K_n \subset \{y \in X; \rho(y, K_{n_0}) < \varepsilon/2\}.$$

Odtud plyne, že S je ε -sít $\bigcup_{n \geq n_0} K_n$. Existuje tedy ε -konečná sít množiny $\bigcup_{n \in \omega} K_n$, protože $\bigcup_{n < n_0} K_n$ je kompaktní.

(2) Necht množina V je otevřená v X a $K \subset V$. Platí $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\bigcup_{j \geq n} K_j} \cap V^c = K \cap V^c = \emptyset$, a tedy existuje $n_0 \in \omega$ takové, že

$$\overline{\bigcup_{j \geq n_0} K_j} \subset V.$$

Pro $n \geq n_0$ tedy platí $K_n \subset V$.

Nyní necht množina $V \subset X$ je opět otevřená a $K \cap V \neq \emptyset$. Nalezneme $\varepsilon > 0$ a $x \in K \cap V$ takové, že $B(x, \varepsilon) \subset V$. K tomuto ε nalezneme $n_0 \in \omega$ takové, že

$$\forall n, m \geq n_0 : h(K_n, K_m) < \varepsilon/2.$$

Dále existuje $m_0 \geq n_0$ takové, že $K_{m_0} \cap B(x, \varepsilon/2) \neq \emptyset$. Potom pro každé $n \geq m_0$ platí $K_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$, a tedy $K_n \cap V \neq \emptyset$. ■

1.7. Rozšiřování spojitých zobrazení

3.B

Věta 1.7.1 (Kuratowski). Necht X je metrický prostor, Y je úplný metrický prostor, $A \subset X$ a $f : A \rightarrow Y$ je spojitě zobrazení. Potom existuje G_δ množina G taková, že $A \subset G \subset \bar{A}$, a spojitě rozšíření $g : G \rightarrow Y$ zobrazení f .

Důkaz. Definujme oscilaci zobrazení f v bodě $x \in \bar{A}$ takto

$$\text{osc}(f, x) = \inf\{\text{diam } f(U); U \text{ je okolí } x\}.$$

Pro $x \in A$ platí $\text{osc}(f, x) = 0$. Položme

$$G = \{x \in \bar{A}; \text{osc}(f, x) = 0\}.$$

Ověříme požadované vlastnosti.

- *Inkluze* $A \subset G \subset \bar{A}$. Tato vlastnost zřejmě platí.
- *Množina* G je typu G_δ . Plyne z rovnosti

$$G = \bigcap_{n \in \omega} \{x \in \bar{A}; \text{osc}(f, x) < 1/n\},$$

neboť $\{x \in \bar{A}; \text{osc}(f, x) < 1/n\}$ je otevřená v $\bar{A}$.

Zobrazení g definujeme takto

$$\{g(x)\} = \bigcap_{k \in \omega} \overline{f(B(x, 2^{-k}))}, \quad x \in G.$$

- *Korektnost definice* g plyne z Věty 1.1.5.
- *Spojitosť* g plyne z rovnosti $\text{osc}(g, x) = \text{osc}(f, x) = 0$ pro $x \in G$.
- *Zobrazení* g rozšiřuje f . Snadné. ■

Věta 1.7.2 (Lavrentěv). Necht X, Y jsou úplné metrické prostory, $A \subset X, B \subset Y$ a $f : A \rightarrow B$ je homeomorfismus A na B . Pak existují G, H typu G_δ takové, že $A \subset G \subset X, B \subset H \subset Y$, a $\tilde{f} : G \rightarrow H$ homeomorfismus G na H splňující $\tilde{f}|_A = f$.

Důkaz. Podle Věty 1.7.1 existuje G_1 typu G_δ a spojitě zobrazení $f_1 : G_1 \rightarrow Y$ takové, že $A \subset G_1$ a $f_1|_A = f$. Podobně nalezneme H_1 typu G_δ a spojitě zobrazení $g_1 : H_1 \rightarrow X$ takové, že $B \subset H_1$ a $g_1|_B = f^{-1}$.

Označme

$$\begin{aligned} R &:= \{(x, y) \in G_1 \times Y; f_1(x) = y\}, \\ S &:= \{(x, y) \in X \times H_1; x = g_1(y)\}. \end{aligned}$$

Položíme $G := \pi_X(R \cap S)$, $H := \pi_Y(R \cap S)$ a $\tilde{f} := f_1|_G$. Zřejmě $\tilde{f}^{-1} = g_1|_H$, a tedy $\tilde{f}$ je homeomorfismus G na H .

Zobrazení $\psi(x) = (x, f_1(x))$ je spojitě na G_1 , S je uzavřená v $X \times H_1$ a $G = \psi^{-1}(S)$. Množina G je tedy typu G_δ v X . Podobně lze odvodit, že H je typu G_δ v Y . ■

1.8. Cvičení

Cvičení 1. Dokažte, že na každém úplném metrickém prostoru existuje ekvivalentní úplná metrika, která je omezená.

Cvičení 2. Dokažte Větu 1.4.2.

Cvičení 3. Je-li X kompaktní metrizable prostor, pak $\mathcal{K}(X)$ je kompaktní.

Cvičení 4. Ukažte, že prostory

(i) $\{K \in \mathcal{K}(\mathbf{R}); \lambda(K) = 0\}$ (λ značí Lebesgueovu míru),

(ii) $\{K \in \mathcal{K}(X); K \text{ je řídká}\}$, kde X je polský,

jsou polské.

Cvičení 5. Ukažte, že prostory $(2^\omega)^\omega$, $2^{\omega \times \omega}$ a 2^ω jsou homeomorfní.

Cvičení 6. Ukažte, že množina $\{\pi \in \omega^\omega; \pi \text{ je permutace}\}$ je polský.

Cvičení 7. Řekneme, že $T \subset \omega^{<\omega}$ je **strom**, jestliže pro každé $t \in \omega^{<\omega}$, $s \in T$, $t < s$, platí $t \in T$. Ukažte, že prostor $\{T \in 2^{(\omega^{<\omega})}; T \text{ je strom}\}$ je kompaktní.

Cvičení 8. Nalezněte $\varphi : \omega^\omega \rightarrow 2^\omega$ takové, že φ je homeomorfismus ω^ω a $\varphi(\omega^\omega)$.

Cvičení 9 (Tietze). Nechť X je metrizable prostor, $F \subset X$ je uzavřená v X a $f : F \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitá. Dokažte, že f lze spojitě rozšířit na X . Dokažte.

Cvičení 10 (Kirszbraunn). Nechť X je metrický prostor, $F \subset X$ a $f : F \rightarrow \mathbf{R}$ je lipschitzovská. Dokažte, že f lze lipschitzovsky rozšířit na X . Dokažte.

Základní vlastnosti borelovských a analytických množin

2.1. Zavedení borelovské hierarchie a její vlastnosti

11.B

Definice 2.1.1. Necht X je metrizovatelný prostor. Pro každé ordinální číslo $1 \leq \xi < \omega_1$ definujeme systémy množin $\Sigma_\xi^0(X)$ a $\Pi_\xi^0(X)$ induktivně takto:

$$\begin{aligned}\Sigma_1^0(X) &= \{U \subset X; U \text{ je otevřená množina}\}, \\ \Pi_1^0(X) &= \{A \subset X; X \setminus A \in \Sigma_1^0(X)\}, \\ \Sigma_\xi^0(X) &= \left\{ \bigcup_{n \in \omega} A_n; A_n \in \Pi_{\xi_n}^0(X), \xi_n < \xi \text{ pro } n \in \omega \right\}, \quad \xi > 1.\end{aligned}$$

Dále označme $\Delta_\xi^0(X) := \Pi_\xi^0(X) \cap \Sigma_\xi^0(X)$. Množinu A ze systému $\Sigma_\xi^0(X)$ (resp. $\Pi_\xi^0(X)$, $\Delta_\xi^0(X)$) nazýváme množinou aditivní třídy ξ (resp. multiplikativní třídy ξ , obojetné třídy ξ) v X .

Vzhledem k tomu, že námi uvažovaný prostor X je metrizovatelný, platí $\Sigma_1^0(X) \subset \Sigma_2^0(X)$. Potom již přímo z definice dostáváme $\Sigma_\xi^0(X) \subset \Sigma_\eta^0(X)$ a $\Pi_\xi^0(X) \subset \Pi_\eta^0(X)$ kdykoliv $1 \leq \xi < \eta < \omega_1$. Odtud opětovným použitím definice dostáváme $\Sigma_\xi^0(X) \cup \Pi_\xi^0(X) \subset \Delta_\eta^0(X)$, kde $1 \leq \xi < \eta < \omega_1$.

Poznámka 2.1.2. Pokud prostor X obsahuje homeomorfní kopii 2^ω , pak jsou všechny uvedené inkluze ostré.

Označme $\text{Borel}(X)$ σ -algebru borelovských množin. Platí

$$\text{Borel}(X) = \bigcup_{1 \leq \xi < \omega_1} \Sigma_\xi^0(X) = \bigcup_{1 \leq \xi < \omega_1} \Pi_\xi^0(X) = \bigcup_{1 \leq \xi < \omega_1} \Delta_\xi^0(X).$$

Poznámka 2.1.3.

- (i) Platí: $F_\sigma = \Sigma_2^0$, $G_\delta = \Pi_2^0$, $F_{\sigma\delta} = \Pi_3^0$, $G_{\delta\sigma} = \Sigma_3^0$
- (ii) Z definice a de Morganových pravidel vyplývá, že Σ_ξ^0 je uzavřená na spočetná sjednocení a Π_ξ^0 na spočetné průniky. Odtud pochází také terminologie.

Věta 2.1.4. Necht X je metrizovatelný prostor a $1 \leq \xi < \omega_1$.

- (i) Systém $\Sigma_\xi^0(X)$ je uzavřený na konečné průniky.
- (ii) Systém $\Pi_\xi^0(X)$ je uzavřený na konečná sjednocení.

Důkaz. (i) Pro $\xi = 1$ tvrzení platí, neboť jde o základní vlastnost topologie. Necht' nyní $A, B \in \Sigma_\xi^0$ a $\xi > 1$. Podle definice můžeme psát:

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{n \in \omega} A_n, & A_n &\in \Pi_{\xi_n}^0(X), & \xi_n &< \xi; \\ B &= \bigcup_{m \in \omega} B_m, & B_m &\in \Pi_{\eta_m}^0(X), & \eta_m &< \xi. \end{aligned}$$

Pak máme

$$A \cap B = \bigcup_{(n,m) \in \omega^2} A_n \cap B_m \quad \text{a} \quad A_n \cap B_m \in \Pi_{\max\{\xi_n, \eta_m\}}^0(X),$$

a tedy $A \cap B \in \Sigma_\xi^0(X)$. Odtud již snadno plyne dokazované tvrzení.

(ii) Tvrzení plyne z (i) užitím de Morganova pravidla. ■

Poznámka 2.1.5. Necht' X je metrizovatelný prostor. Potom je σ -algebra borelovských množin nejmenším systémem, který obsahuje všechny otevřené podmnožiny X a je uzavřený na spočetná sjednocení a spočetné průniky.

Věta 2.1.6. Necht' X je metrizovatelný prostor, $A \subset Z \subset X$ a $1 \leq \xi < \omega_1$. Pak $A \in \Sigma_\xi^0(Z)$ právě tehdy, když existuje $\tilde{A} \in \Sigma_\xi^0(X)$ takové, že $A = \tilde{A} \cap Z$. Analogické tvrzení platí i pro multiplikativní třídy.

Důkaz. Pro $\alpha = 1$ plyne požadované tvrzení z definice topologie na podprostoru. Pro ostatní α obdržíme tvrzení transfinite indukci. ■

Věta 2.1.7. Necht' X, Y jsou metrizovatelné prostory a $f : X \rightarrow Y$ je spojitý. Jestliže $A \in \Sigma_\alpha^0(Y)$ (resp. $\Pi_\alpha^0(Y)$, $\Delta_\alpha^0(Y)$), pak $f^{-1}(A) \in \Sigma_\alpha^0(X)$ (resp. $\Pi_\alpha^0(X)$, $\Delta_\alpha^0(X)$).

Důkaz. Pro Σ_1^0, Π_1^0 tvrzení platí – jde o základní vlastnost spojitých zobrazení. Pokud tvrzení platí pro každé $\Sigma_\xi^0(Y)$, $\Pi_\xi^0(Y)$, $\xi < \alpha$, a máme $A \in \Sigma_\alpha^0(Y)$, potom $A = \bigcup_{n \in \omega} A_n$, kde $A_n \in \Pi_{\xi_n}^0(Y)$, $\xi_n < \alpha$, a

$$f^{-1}(A) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \omega} A_n\right) = \bigcup_{n \in \omega} \underbrace{f^{-1}(A_n)}_{\in \Pi_{\xi_n}^0(X)},$$

a tedy $f^{-1}(A) \in \Sigma_\alpha^0(X)$. Vztah

$$f^{-1}(Y \setminus A) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(A) = X \setminus f^{-1}(A),$$

pak ukazuje platnost tvrzení pro Π_α^0 .

Tvrzení pro Δ_α^0 vyplývá okamžitě z výsledku pro aditivní a multiplikativní třídy. ■

Poznámka 2.1.8. Pro obrazy podobné tvrzení neplatí. O tom více v dalších paragrafech.

Věta 2.1.9 (borelovské třídy v polských prostorech). Necht' X, Y jsou polské prostory, $A \in \Sigma_\alpha^0(X)$, $\alpha \geq 3$ (resp. $\Pi_\alpha^0(X)$, $\alpha \geq 2$), $B \subset Y$. Jestliže jsou A a B homeomorfní, potom $B \in \Sigma_\alpha^0(Y)$ (resp. $\Pi_\alpha^0(Y)$).

Důkaz. Tvrzení dokážeme pouze pro aditivní třídy. Pro multiplikativní třídy je důkaz stejný. Nechť $f : A \rightarrow B$ je homeomorfismus A na B . Tento podle Věty 1.7.2 rozšíříme na homeomorfismus množiny $\tilde{A} \in \Pi_2^0(X)$ na množinu $\tilde{B} \in \Pi_2^0(Y)$. Potom je $B \in \Sigma_\alpha^0(\tilde{B})$, a tedy také $B \in \Sigma_\alpha^0(Y)$, neboť $\alpha \geq 3$. ■

Příklad 2.1.10.

► Označme

$$\mathbf{Q} = \{\alpha \in 2^\omega; \exists n \in \omega \forall j \geq n : \alpha_j = 0\}.$$

Množina $\mathbf{Q}$ je Σ_2^0 a není Π_2^0 .

► Množina

$$\mathbf{S} = \{\beta \in (2^\omega)^\omega; \forall n \in \omega : \beta_n \in \mathbf{Q}\}$$

je Π_3^0 a není Σ_3^0 .

► Nechť X je polský prostor. Množina

$$\text{Fin} = \{K \in \mathcal{K}(X); K \text{ je konečná}\}$$

je typu Σ_2^0 a není typu Π_2^0 .

2.2. Analytické množiny a jejich vlastnosti

14.A

Definice 2.2.1. Nechť X je polský a $A \subset X$. Řekneme, že A je **analytická** (v X), jestliže existuje polský prostor Y a spojitě zobrazení $\varphi : Y \rightarrow X$ takové, že $\varphi(Y) = A$. Množinu všech analytických množin v X značíme $\Sigma_1^1(X)$.

Řekneme, že A je **koanalytická** (v X), jestliže $X \setminus A \in \Sigma_1^1(X)$. Množinu všech koanalytických množin v X značíme $\Pi_1^1(X)$.

Poznámka 2.2.2.

- (i) Prázdná množina je analytická, stačí vzít za Y prázdný prostor.
- (ii) Každá Π_2^0 podmnožina polského prostoru X je analytická (Věta 1.3.3).
- (iii) Spojitá zobrazení mezi polskými prostory zachovávají analytičnost, tj. je-li $\psi : X \rightarrow Z$ spojitě zobrazení mezi polskými prostory a $A \in \Sigma_1^1(X)$, pak $\psi(A) \in \Sigma_1^1(Z)$.

Věta 2.2.3. Nechť X je polský a $A_n, n \in \omega$, jsou analytické v X . Potom $\bigcup_{n \in \omega} A_n, \bigcap_{n \in \omega} A_n$ jsou analytické v X .

Důkaz. Sjednocení. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $A_n \neq \emptyset$ pro každé $n \in \omega$. Podle Věty 1.3.3 existuje pro každé $n \in \omega$ spojitě zobrazení $\varphi_n : \omega^\omega \rightarrow X$ splňující $\varphi_n(\omega^\omega) = A_n$. Definujeme $\varphi : \omega^\omega \rightarrow X$ takto

$$\varphi(v_0, v_1, v_2, \dots) = \varphi_{v_0}(v_1, v_2, \dots),$$

tj. $\varphi(n^\wedge v) = \varphi_n(v)$.

Zobrazení φ je spojitě. Pokud $v^j \rightarrow v$, pak existuje $n_0 \in \omega$ takové, že pro každé $j \geq n_0$ platí $v_0^j = v_0$. Pak máme

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi(v^j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{v_0^j}(v_1^j, \dots) = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{v_0}(v_1^j, \dots) = \varphi_{v_0}(v_1, \dots) = \varphi(v).$$

Platnost $\varphi(\omega^\omega) = \bigcup_{n \in \omega} A_n$. Je-li $x \in \bigcup_{n \in \omega} A_n$, potom existuje $n \in \omega$ takové, že $x \in A_n$. Pak nalezneme $v \in \omega^\omega$ takové, že $\varphi_n(v) = x$. Odtud máme $\varphi(n^\wedge v) = \varphi_n(v) = x$. Opačná inkluze je zřejmá.

Nyní dokážeme tvrzení o průniku. Předpokládejme, že $\bigcap_{n \in \omega} A_n \neq \emptyset$, v opačném případě tvrzení zřejmě platí. Položme $Y = (\omega^\omega)^\omega$. Prostor Y je polský podle Věty 1.2.1(i). Necht' nyní φ_n jsou jako v předchozí části. Položme

$$F = \{y = (y_0, y_1, y_2, \dots) \in Y; \forall n, m \in \omega : \varphi_n(y_n) = \varphi_m(y_m)\}.$$

Platí

$$F = \bigcap_{n, m \in \omega} \underbrace{\{y \in Y; \varphi_n(y_n) = \varphi_m(y_m)\}}_{\text{uzavřená}}.$$

Množina F je tedy uzavřená v Y a jde tak o polský prostor. Pak platí

$$\varphi_0 \circ \pi_0(F) = \bigcap_{n \in \omega} A_n,$$

kde $\pi_0 : Y \rightarrow \omega^\omega$ je projekce na nultou souřadnici. Je-li totiž $x \in \varphi_0 \circ \pi_0(F)$, tak existuje $(y_0, y_1, \dots) \in Y$ takové, že

$$x = \varphi_0(y_0) = \varphi_1(y_1) = \dots,$$

a tedy $x \in \bigcap_{n \in \omega} A_n$. Pokud $x \in \bigcap_{n \in \omega} A_n$, pak existují $y_0, y_1, \dots \in \omega^\omega$ takové, že $\varphi_i(y_i) = x$. Pak máme $x = (\varphi_0 \circ \pi_0)(y)$, kde $y = (y_0, y_1, \dots)$. ■

Poznámka 2.2.4.

- (i) Z předchozí věty a de Morganových pravidel dostáváme analogické tvrzení i pro koanalytické množiny.
- (ii) Třída analytických množin není uzavřená na operaci doplňku.

Věta 2.2.5. Necht' X, Y jsou polské prostory, $A \in \Sigma_1^1(X)$ (resp. $\Pi_1^1(X)$), $B \subset Y$ a A je homeomorfní s B . Potom $B \in \Sigma_1^1(Y)$ (resp. $\Pi_1^1(Y)$).

Důkaz. Tvrzení pro Σ_1^1 plyne z Poznámky 2.2.2.

Necht' $A \in \Pi_1^1(X)$ a $\varphi : A \rightarrow B$ je homeomorfismus. Podle Lavrentěvovy věty (Věta 1.7.2) existují $\tilde{A} \in \Pi_2^0(X)$, $\tilde{B} \in \Pi_2^0(Y)$ a homeomorfismus $\tilde{\varphi} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$ rozšiřující φ , přičemž $A \subset \tilde{A}$, $B \subset \tilde{B}$. Potom $\tilde{B} \setminus B \in \Sigma_1^1(Y)$, a tedy $Y \setminus B = (Y \setminus \tilde{B}) \cup (\tilde{B} \setminus B) \in \Sigma_1^1(Y)$, takže $B \in \Pi_1^1(Y)$. ■

Věta 2.2.6. Necht' X je polský. Pak $\text{Borel}(X) \subset \Sigma_1^1(X)$ a $\text{Borel}(X) \subset \Pi_1^1(X)$.

Důkaz. Podle Věty 1.3.3 platí $\Sigma_1^0(X) \subset \Sigma_1^1(X)$. Nyní Poznámka v 2.1.5 a Věta 2.2.3 společně dávají $\text{Borel}(X) \subset \Sigma_1^1(X)$. Odtud také ihned plyne $\text{Borel}(X) \subset \Pi_1^1(X)$. ■

2.3. Luzinova věta

14.B

Věta 2.3.1. Necht' X je polský, $A_1, A_2 \in \Sigma_1^1(X)$ a $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Pak existuje borelovská množina $B \subset X$ oddělující A_1 od A_2 , tj. $A_1 \subset B$ a $B \cap A_2 = \emptyset$.

K důkazu použijeme následující lemma.

Lemma 2.3.2. Necht' pro každé $n, m \in \omega$ lze množinu $C_n \subset X$ oddělit od množiny $D_m \subset X$ borelovskou množinou. Pak lze $\bigcup_{n \in \omega} C_n$ oddělit od $\bigcup_{m \in \omega} D_m$ borelovskou množinou.

Důkaz. Necht $n, m \in \omega$ a $B_{n,m}$ je borelovská množina splňující $C_n \subset B_{n,m}$, $B_{n,m} \cap D_m = \emptyset$. Pak stačí položit

$$B = \bigcup_{n \in \omega} \bigcap_{m \in \omega} B_{n,m}.$$

■

Důkaz věty. Pokud je alespoň jedna z množin A_1, A_2 prázdná, pak tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že uvedené množiny jsou neprázdné. Pak existují spojitá zobrazení φ_1 a φ_2 z ω^ω do X taková, že $\varphi_1(\omega^\omega) = A_1$ a $\varphi_2(\omega^\omega) = A_2$. Předpokládejme, že A_1 nelze oddělit od A_2 borelovskou množinou. Pak podle Lemmatu existují $\nu_0, \mu_0 \in \omega$ taková, že $\varphi_1(\mathcal{N}(\mu_0))$ nelze oddělit od $\varphi_2(\mathcal{N}(\nu_0))$ borelovskou množinou. Platí totiž

$$\varphi_i(\omega^\omega) = \bigcup_{n \in \omega} \varphi_i(\mathcal{N}(n)), \quad i = 1, 2.$$

Opakovaným užitím Lemmatu 2.3.2 zkonstruujeme $\mu, \nu \in \omega^\omega$ takové, že pro každé $k \in \omega$ platí: $\varphi_1(\mathcal{N}(\nu|k))$ nelze oddělit od $\varphi_2(\mathcal{N}(\mu|k))$ borelovskou množinou. Platí $\varphi_1(\mu) \in A_1$, $\varphi_2(\nu) \in A_2$, a tak existují otevřené disjunktní množiny $G_1, G_2 \subset X$ takové, že $\varphi_1(\mu) \in G_1$ a $\varphi_2(\nu) \in G_2$. Zobrazení φ_1, φ_2 jsou spojitá, a proto existuje $k \in \omega$ takové, že

$$\varphi_1(\mathcal{N}(\mu|k)) \subset G_1 \quad \text{a} \quad \varphi_2(\mathcal{N}(\nu|k)) \subset G_2,$$

což je spor. ■

Důsledek 2.3.3. Necht X je polský, $A \subset X$ je analytická i koanalytická. Potom A je borelovská.

Důkaz. Stačí aplikovat Luzinovu větu na dvojici $A_1 := A$ a $A_2 := X \setminus A$. ■

Příklad 2.3.4. 1. Množina

$$\{f \in \mathcal{C}([0, 1]); f \text{ má vlastní derivaci v každém bodě}\}$$

je koanalytická, ne však borelovská.

2. Množina

$$\{f \in \mathcal{C}([0, 2\pi]); \text{Fourierova řada } f \text{ konverguje všude k } f\}$$

je koanalytická, ne však borelovská (Kechris-Ajtai [?]).

3. Množina

$$\{K \in \mathcal{K}([0, 1]); K \text{ je spočetná}\}$$

je koanalytická, ne však borelovská (Hurewicz).

————— Konec 9. přednášky, 7.11. 2011 —————

2.4. Suslinova operace

25.C

Definice 2.4.1. Suslinovým schématem (na množině X) rozumíme systém podmnožin X indexovaný prvky $\omega^{<\omega}$. Suslinova operace aplikovaná na schéma $(P_s)_{s \in \omega^{<\omega}}$ dává množinu

$$\mathcal{A}_s P_s = \bigcup_{\nu \in \omega^\omega} \bigcap_{n \in \omega} P_{\nu|n}.$$

Věta 2.4.2. Necht X je polský, $A \subset X$. Pak je ekvivalentní:

- (a) $A \in \Sigma_1^1(X)$,
- (b) existuje uzavřená $F \subset X \times \omega^\omega$ taková, že $\pi_X(F) = A$,
- (c) existuje Suslinovo schéma $(F_s)_{s \in \omega^{<\omega}}$ z uzavřených podmnožin X takové, že $A = \mathcal{A}_s F_s$.

Důkaz. Předpokládejme, že A je neprázdná, jinak je tvrzení zřejmé.

(a) $\Rightarrow$ (c) Necht $\varphi: \omega^\omega \rightarrow X$ je spojitě a na A . Položme $F_s = \overline{\varphi(\mathcal{N}(s))}$. Pokud $x \in A$, pak existuje $\mu \in \omega^\omega$ takové, že $x = \varphi(\mu)$. Pak máme

$$x \in \varphi(\mathcal{N}(\mu|k)) \subset F_{\mu|k}$$

pro každé $k \in \omega$. Odtud $x \in \bigcap_{k \in \omega} F_{\mu|k} \subset \bigcup_{v \in \omega^\omega} \bigcap_{n \in \omega} F_{v|n}$. Pokud existuje $\mu \in \omega^\omega$ takové, že $x \in \overline{\varphi(\mathcal{N}(\mu|k))}$, pak $x = \varphi(\mu)$ díky spojitosti φ .

(c) $\Rightarrow$ (b) Položme

$$F_n = \bigcup_{\substack{s \in \omega^{<\omega} \\ |s|=n}} (F_s \times \mathcal{N}(s)), \quad F = \bigcap_{n \in \omega} F_n.$$

Pak F_n jsou uzavřené, a tedy i F je uzavřená. Navíc $\pi(F) = A$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Zřejmé. ■

2.5. Obrazy a vzory při borelovských zobrazeních

7.9

Věta 2.5.1. Necht X je polský. Potom existuje uzavřená množina $F \subset \omega^\omega$ a spojitá bijekce $f: F \rightarrow X$.

Důkaz. Zafixujeme úplnou kompatibilní metriku na X splňující $\text{diam } X \leq 1$. Budeme konstruovat Suslinovo schéma $(F_s)_{s \in \omega^{<\omega}}$ takové, že pro každé $s \in \omega^{<\omega}$ platí

- (i) $F_\emptyset = X$,
- (ii) F_s je typu F_σ ,
- (iii) $F_s = \bigcup_{j \in \omega} F_{s^\wedge j} = \bigcup_{j \in \omega} \overline{F_{s^\wedge j}}$,
- (iv) $\text{diam } F_s \leq 2^{-|s|}$,
- (v) $\forall i, j \in \omega : F_{s^\wedge i} \cap F_{s^\wedge j} = \emptyset$.

Konstrukce schématu. Pro libovolnou množinu D typu F_σ a libovolné $\varepsilon > 0$ stačí nalézt spočetný disjunktní systém $\mathcal{D}$ obsahující F_σ množiny o diametru menším než ε a splňující

- $D = \bigcup \mathcal{D}$,
- $\forall E \in \mathcal{D} : \overline{E} \subset D$.

Napišme nejprve D jako sjednocení rostoucí posloupnosti uzavřených množin C_j , $j \in \omega$, přičemž $C_0 = \emptyset$. Potom každý rozdíl $C_{j+1} \setminus C_j$ vyjádříme jako spočetné sjednocení disjunktního systému F_σ množin $(E_i^j)_{i \in \omega}$, kde $\text{diam } E_i^j < \varepsilon$. Položme $\mathcal{D} = \{E_i^j; i, j \in \omega\}$. Požadované podmínky jsou splněny včetně poslední, platí totiž $\overline{E_i^j} \subset C_j \subset D$.

Konstrukce F a f . Položme

$$F = \{v \in \omega^\omega; \bigcap_{n \in \omega} F_{v|n} \neq \emptyset\}, \quad \{f(v)\} = \bigcap_{n \in \omega} F_{v|n}.$$

Není těžké ověřit, že zobrazení $f: F \rightarrow X$ je dobře definováno, je spojitě a je na. Ukážeme, že množina F je uzavřená. Vezměme posloupnost (v^j) prvků množiny F s limitou v . Pro každé $j \in \omega$ nalezneme $x_j \in \bigcap_{n \in \omega} F_{v^j|n}$. Posloupnost (x^j) je cauchyovská, a tedy

konvergentní. Označme x^* limitu této posloupnosti. Potom $x^* \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{F_{v|n}} = \bigcap_{n \in \omega} F_{v|n}$, a tedy $v \in F$. ■

Lemma 2.5.2. Necht (X, τ) je polský a $F \subset X$ je uzavřená. Necht τ_F je topologie generovaná $\tau \cup \{F\}$. Potom

- τ_F je polská,
- $F \in \Delta_1^0(\tau_F)$,
- $\text{Borel}(\tau_F) = \text{Borel}(\tau)$.

Důkaz. Prostor (X, τ_F) je homeomorfní s $((X \setminus F) \times \{0\}) \cup (F \times \{1\}) \subset X \times 2$, což je G_δ podmnožina $X \times 2$. Prostor (X, τ_F) je tedy polský. Zbývající dvě vlastnosti je snadné ověřit. ■

Lemma 2.5.3. Necht (X, τ) je polský a $(\tau_n)_{n \in \omega}$ jsou polské topologie a $\tau \subset \tau_n$. Potom topologie τ_∞ generovaná $\bigcup_{n \in \omega} \tau_n$ je polská. Jestliže $\tau_n \subset \text{Borel}(\tau)$, potom $\text{Borel}(\tau) = \text{Borel}(\tau_\infty)$.

Důkaz. Položme $X_n = X$, $\varphi: X \rightarrow \prod X_n$, $\varphi(x) = (x, x, x, \dots)$. Zobrazení φ je homeomorfismus (X, τ_∞) na $\varphi(X)$. ■

Věta 2.5.4. Necht (X, τ) je polský a $A \subset X$ je borelovská. Potom existuje polská topologie $\tau \subset \tau_A$ taková, že $\text{Borel}(\tau) = \text{Borel}(\tau_A)$ a $A \in \Delta_1^0(\tau_A)$. 13.1

Důkaz. Položme

$$\mathcal{S} = \{D \in \text{Borel}(X); \text{ existuje polská topologie } \tau_D \supset \tau \text{ splňující} \\ \text{Borel}(\tau_D) = \text{Borel}(\tau), A \in \Delta_1^0(\tau_D)\}.$$

Podle Lemmatu 2.5.2 platí $\tau \subset \mathcal{S}$. Systém $\mathcal{S}$ tvoří σ -algebru, neboť je zřejmě uzavřený na komplementy a podle Lemmat 2.5.2 a 2.5.3 je uzavřený na spočetná sjednocení. Potom tedy $\mathcal{S} = \text{Borel}(X)$, čímž je věta dokázána. ■

Lemma 2.5.5. Necht X, Y jsou polské a $f: X \rightarrow Y$ je borelovské. Potom graf f je borelovskou podmnožinou $X \times Y$.

Důkaz. Necht $\mathcal{U}_n, n \in \omega$, je spočetný systém otevřených koulí o diametru menším než 2^{-n} , který pokrývá Y . Potom

$$\text{graf } f = \bigcap_{n \in \omega} \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} f^{-1}(U) \times U,$$

a tedy graf f je borelovská množina. ■

Věta 2.5.6. Necht X, Y jsou polské a $f: X \rightarrow Y$ je borelovské. Jestliže $A \subset X$ je borelovská a $f|_A$ je prosté, potom $f(A)$ je borelovská. 15.1

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že f je spojitá a A uzavřená. Podle Věty 2.5.1 lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že A je uzavřená podmnožina ω^ω . Označme $B_s = f(\mathcal{N}(s) \cap A)$. Platí

- $\forall s \in \omega^{<\omega} \forall i, j \in \omega, i \neq j : B_{s \wedge i} \cap B_{s \wedge j} = \emptyset$,
- $B_s = \bigcup_{i \in \omega} B_{s \wedge i}$.

Pomocí Luzinovy oddělovací věty (Věta 2.3.1) nalezneme Suslinovo schéma $(B'_s)_{s \in \omega^{<\omega}}$ sestávající z borelovských množin, které splňuje

- $\forall s \in \omega^{<\omega} \forall i, j \in \omega, i \neq j : B'_{s \wedge i} \cap B'_{s \wedge j} = \emptyset$,

- $\forall s \in \omega^{<\omega} : B_s \subset B'_s$.

Dále definujeme $B_\emptyset^* = Y$ a $B_{s^\wedge j}^* = B'_{s^\wedge j} \cap \overline{B_{s^\wedge j}} \cap B_s^*$. Potom je pro každé $s \in \omega^{<\omega}$ množina B_s^* borelovská a platí $B_s \subset B_s^* \subset \overline{B_s}$. Dokážeme $f(A) = \bigcap_{k \in \omega} \bigcup_{s \in \omega^k} B_s^*$.

Pokud $x \in f(A)$, potom existuje $v \in A$ takové, že $f(v) = x$. Potom $x \in B_{v|k} \subset B_{v|k}^*$ pro každé $k \in \omega$. Odtud plyne $x \in \bigcap_{k \in \omega} \bigcup_{s \in \omega^k} B_s^*$.

Pokud $x \in \bigcap_{k \in \omega} \bigcup_{s \in \omega^k} B_s^*$. Potom existuje $v \in \omega^\omega$ takové, že $x \in B_{v|k}^*$. Potom pro každé $k \in \omega$ platí $f(\mathcal{N}(v|k) \cap A) \neq \emptyset$. Odtud plyne $v \in A$. Odvodíme $f(v) = x$. Kdyby $f(v) \neq x$, pak existuje okolí U bodu $f(v)$ takové, že $x \notin \overline{U}$. Potom pro jisté $k_0 \in \omega$ máme $f(\mathcal{N}(v|k_0) \cap A) = \overline{B_{v|k_0}} \subset \overline{U}$ a přitom $x \in B_{v|k_0}^* \subset \overline{B_{v|k_0}}$, což je spor.

Nyní předpokládejme, že f je spojitě zobrazení a A je borelovská. Na prostoru X existuje polská topologie τ_A taková, že $A \in \Delta_1^0(\tau_A)$ a $\tau \subset \tau_A$. Zobrazení f je potom spojitě z (X, τ_A) do Y , a proto podle předchozího je $f(A)$ borelovská.

Pokud je f borelovské, potom $f(A) = \pi_Y(\text{graf } f \cap (A \times Y))$, a tedy $f(A)$ je prostým spojitým obrazem borelovské množiny $\text{graf } f \cap (A \times Y)$. ■

Věta 2.5.7. Necht X, Y jsou polské a $f: X \rightarrow Y$ je borelovské.

- (i) Jestliže $A \in \Sigma_1^1(X)$, potom $f(A) \in \Sigma_1^1(Y)$.
- (ii) Jestliže $B \in \Sigma_1^1(Y)$, potom $f^{-1}(B) \in \Sigma_1^1(X)$.
- (iii) Jestliže $B \in \Pi_1^1(Y)$, potom $f^{-1}(B) \in \Pi_1^1(X)$.

Důkaz. (i) Množina $\text{graf } f$ je borelovská podle Lemmatu 2.5.5. Platí

$$f(A) = \pi_Y(\text{graf } f \cap (A \times Y)),$$

a tedy $f(A)$ je spojitým obrazem analytické množiny, takže $f(A)$ je analytická.

(ii) a (iii) Tvrzení plynou z rovností

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) &= \pi_X(\text{graf } f \cap (X \times A)), \\ f^{-1}(A) &= f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(Y \setminus A). \end{aligned}$$

■

2.6. Standardní borelovské prostory

12.B, 12.C

Definice 2.6.1. Měřitelný prostor $(X, \mathcal{S})$ se nazývá **standardní borelovský prostor**, jestliže existuje polská topologie τ na X taková, že $\text{Borel}(X, \tau) = \mathcal{S}$.

Definice 2.6.2. Necht X je topologický prostor a $\mathcal{F}(X)$ je systém všech uzavřených podmnožin X . Necht $\mathcal{S}$ je σ -algebra generovaná množinami tvaru $\{F \in \mathcal{F}(X); F \cap U \neq \emptyset\}$, kde $U \subset X$ je otevřená. Potom **Effrosovým borelovským prostorem** rozumíme $(\mathcal{F}(X), \mathcal{S})$.

Věta 2.6.3. Pokud je X polský, potom $\mathcal{F}(X)$ je standardní borelovský prostor.

Příklad 2.6.4 (separabilní Banachovy prostory). Prostor

$$\text{SB} = \{Y \in \mathcal{F}(\mathcal{C}([0, 1])); Y \text{ je Banachův podprostor } \mathcal{C}([0, 1])\}$$

opatřený restrikcí Effrosovy σ -algebry je standardní borelovský. Platí

$$\begin{aligned} \text{SD} &= \{Y \in \text{SB}; Y \text{ má separabilní duál}\}, \\ \text{NU} &= \{Y \in \text{SB}; Y \text{ není univerzální}\}, \\ \text{REFL} &= \{Y \in \text{SB}; Y \text{ je reflexivní}\}, \\ \text{NL}_1 &= \{Y \in \text{SB}; Y \text{ neobsahuje } \ell_1\}, \end{aligned}$$

jsou Π_1^1 neborelovské v $\mathcal{C}([0, 1])$.

Příklad 2.6.5 (von Neumannovy algebry). Necht H je komplexní nekonečnědimenzionální separabilní Hilbertův prostor. Označme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(H) &= \{T \in \mathcal{L}(H); \|T\| \leq 1\}, \\ \text{VN} &= \{\mathcal{A} \cap \mathcal{L}_1(H); \mathcal{A} \text{ je von Neumannova algebra}\}. \end{aligned}$$

Na $\mathcal{L}_1(H)$ uvažujeme slabou topologii. Potom VN je standardní borelovský prostor.

Regularita analytických množin

3.1. Množiny s Baireovou vlastností

8.A, 8.B

Definice 3.1.1. Necht X je topologický prostor. Množina $A \subset X$ má **Baireovu vlastnost** ($\mathbf{v} X$), jestliže existuje otevřená množina $U \subset X$ a množina první kategorie $M \subset X$ takové, že $A = U \Delta M$. Systém všech podmnožin X s Baireovou vlastností značíme $\text{Baire}(X)$.

Věta 3.1.2. Necht X je topologický prostor. Potom $\text{Baire}(X)$ tvoří σ -algebru obsahující všechny borelovské podmnožiny X .

Důkaz. Je-li $F \subset X$ uzavřená, pak $F \in \text{Baire}(X)$, neboť lze psát $F = \text{Int } F \cup (F \setminus \text{Int } F)$, kde první člen je množina otevřená a druhý řídka.

Uzavřenost na doplňky. Necht nyní $A = G \Delta M$, kde G je otevřená a M je první kategorie. Potom platí

$$X \setminus A = (X \setminus G) \Delta M' = (G' \Delta M'') \Delta M' = G' \Delta M''',$$

kde G' je otevřená a M', M'', M''' jsou první kategorie.

Uzavřenost na spočetná sjednocení. Necht $A_n \in \text{Baire}(X)$, $n \in \omega$. Pišme $A_n = G_n \Delta M_n$, kde G_n je otevřená množina a M_n je první kategorie. Potom platí

$$\bigcup_{n \in \omega} A_n = \bigcup_{n \in \omega} (G_n \setminus M'_n) \cup M''_n = \left(\bigcup_{n \in \omega} G_n \setminus M'''_n \right) \cup \bigcup_{n \in \omega} M''_n,$$

kde M'_n, M''_n, M'''_n jsou první kategorie.

Inkluze $\text{Borel}(X) \subset \text{Baire}(X)$ plyne z předchozího. ■

Lemma 3.1.3. Necht X je topologický prostor a $A \subset X$. Jestliže pro každé $x \in A$ existuje otevřená množina V taková, že $x \in V$ a $A \cap V$ je první kategorie, potom A je první kategorie.

Důkaz. Necht $\mathcal{U}$ je maximální disjunktní systém otevřených množin takový, že $U \cap A$ je první kategorie pro každou $U \in \mathcal{U}$. Potom $A \cap \bigcup \mathcal{U}$ je první kategorie, stejně tak $A \setminus \bigcup \mathcal{U}$, neboť $X \setminus \bigcup \mathcal{U}$ je řídka. ■

Definice 3.1.4. Necht $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a $A \subset X$. Řekneme, že $\hat{A} \in \mathcal{S}$ je **$\mathcal{S}$ -obalem** množiny A , jestliže splňuje

- (i) $A \subset \hat{A}$,
- (ii) jestliže $B \in \mathcal{S}$ splňuje $A \subset B$, potom každá podmnožina $\hat{A} \setminus B$ je prvkem $\mathcal{S}$.

Věta 3.1.5. Necht X je topologický prostor. Pak každá množina v v X má $\text{Baire}(X)$ -obal.

29.11

Důkaz. Položme

$$E(A) = X \setminus \bigcup \{V \subset X; V \text{ je otevřená a } A \text{ je první kategorie ve } V\}.$$

Množina $A \setminus E(A)$ je první kategorie podle Lemmatu 3.1.3. Existuje tedy $W \subset X$ první kategorie a F_σ taková, že $A \setminus E(A) \subset W$. Položme $\hat{A} = E(A) \cup W$. Potom $\hat{A} \in \text{Baire}(X)$.

Nechť $B \in \text{Baire}(X)$ splňující $A \subset B$. Zřejmě $E(A) \subset E(B)$. Takže

$$\hat{A} \setminus B = (E(A) \cup W) \setminus B = (E(A) \setminus B) \cup (W \setminus B) \subset (E(B) \setminus B) \cup (W \setminus B).$$

Množina $W \setminus B$ je první kategorie. Množina B má Baireovu vlastnost, a proto lze psát $B = H \triangle M$, kde H je otevřená množina a M je množina první kategorie. Potom máme

$$E(B) \setminus B \subset (E(B) \setminus H) \cup M \subset (\overline{H} \setminus H) \cup M.$$

Poslední množina je první kategorie, takže $\hat{A} \setminus B$ je také první kategorie, což jsme měli dokázat. ■

29.13

Věta 3.1.6 (Szpilrajn-Marczewski). Necht $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor, kde každá $A \subset X$ má $\mathcal{S}$ -obal. Potom $\mathcal{S}$ je uzavřená na Suslinovu operaci.

Důkaz. Necht $(P_s)_{s \in \omega < \omega}$ je systém množin z $\mathcal{S}$. Položme $P = \mathcal{A}_s P_s$. Můžeme předpokládat, že $P_s \supset P_t$ pro každé $s < t$. Jinak by stačilo místo P_t vzít $\bigcap_{s < t} P_s$. Označme

$$A^s = \bigcup_{v \in \mathcal{N}(s)} \bigcap_{n \in \omega} P_{v|n},$$

neboli $A^s = \mathcal{A}_t P_{s \wedge t}$. Platí: $A^s \subset P_s$, $A^\emptyset = P$, $A^s = \bigcup_{n \in \omega} A^{s \wedge n}$. Necht $\widehat{A^s}$ je $\mathcal{S}$ -obal A^s splňující $A^s \subset \widehat{A^s} \subset P_s$. Položme

$$Q_s = \widehat{A^s} \setminus \bigcup_{n \in \omega} \widehat{A^{s \wedge n}}, \quad Q = \bigcup_{s \in \omega < \omega} Q_s.$$

Každá podmnožina Q je v $\mathcal{S}$ podle definice $\mathcal{S}$ -obalu. Platí $\widehat{A^\emptyset} \setminus P \subset Q$. Skutečně, máme-li $x \in \widehat{A^\emptyset} \setminus Q$, pak existuje $n_0 \in \omega$ takové, že $x \in \widehat{A^{n_0}} \setminus Q$. Potom nalezneme $n_1 \in \omega$ takové, že $x \in \widehat{A^{n_0, n_1}} \setminus Q$. Opakováním tohoto postupu dostaneme $v \in \omega^\omega$ takové, že $x \in \widehat{A^{v|n}} \subset P_{v|n}$ pro každé $n \in \omega$. Odtud pak $x \in P$.

Nyní lze psát

$$P = \widehat{A^\emptyset} \setminus (\widehat{A^\emptyset} \setminus P).$$

Oba členy rozdílu patří do $\mathcal{S}$, a tedy $P \in \mathcal{S}$. ■

Poznámka 3.1.7. Edward Szpilrajn-Marczewski (1907-1976).

Důsledek 3.1.8. Necht X je polský. Potom $\Sigma_1^1(X) \subset \text{Baire}(X)$.

Důkaz. Platí $\Pi_1^0(X) \subset \text{Baire}(X)$, a tedy $\Sigma_1^1(X) = \mathcal{A}\Pi_1^0(X) \subset \mathcal{A}\text{Baire}(X) = \text{Baire}(X)$. ■

Definice 3.1.9. Necht X je polský. Řekneme, že $A \subset X$ je **univerzálně měřitelná**, jestliže pro každou σ -konečnou borelovskou míru μ na X je množina A μ -měřitelná.

Poznámka 3.1.10. Připomenutí a ujasnění definic pro účely tohoto textu.

- (i) **Borelovskou mírou** na topologickém prostoru X rozumíme míru na měřitelném prostoru $(X, \text{Borel}(X))$.
- (ii) Necht μ je míra na $(X, \mathcal{S})$. Množina $A \subset X$ je **μ -nulová**, jestliže existuje $B \in \mathcal{S}$ taková, že $A \subset B$ a $\mu(B) = 0$. Řekneme, že množina $A \subset X$ je **μ -měřitelná**, jestliže $A = B \cup N$, kde $B \in \mathcal{S}$ a N je μ -nulová.

Věta 3.1.11 (Luzin-Sierpiński). Necht X je polský a $A \in \Sigma_1^1(X)$. Potom A je univerzálně měřitelná.

29.15

Důkaz. Necht μ je σ -konečná borelovská míra na X a $\mathcal{S}$ je σ -algebra μ -měřitelných množin. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že μ je pravděpodobnostní. Pro $A \subset X$ položme

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B); B \in \text{Borel}(X), A \subset B\}.$$

Pak existuje $\widehat{A} \in \text{Borel}(X)$ taková, že $\mu^*(A) = \mu(\widehat{A})$. Jestliže $A \subset B$ a B je měřitelná, pak $\mu(\widehat{A} \setminus B) = 0$. Jinak by totiž existovala $C \subset \widehat{A} \setminus B \subset \widehat{A} \setminus A$ taková, že $C \in \text{Borel}(X)$ a $\mu(C) > 0$, což nelze. Odtud a z Věty 3.1.6 plyne dokazované tvrzení. ■

————— Konec 9. přednášky, 9.12. 2013 —————

3.2. Soleckého věta

Necht X je polský a $\mathcal{I}$ je systém uzavřených podmnožin X . Položme

$$\mathcal{I}^{\text{ext}} = \{A \subset X; \exists \mathcal{F} \subset \mathcal{I} : \mathcal{F} \text{ je spočetný a } A \subset \bigcup \mathcal{F}\}.$$

Věta 3.2.1 (Solecki [?]). Necht X je polský, $A \in \Sigma_1^1(X)$ a $\mathcal{I}$ je systém uzavřených množin v X . Pokud $A \notin \mathcal{I}^{\text{ext}}$, pak existuje Π_2^0 množina $H \subset A$ taková, že $H \notin \mathcal{I}^{\text{ext}}$.

Označení 3.2.2. $\mathcal{I}$ bude nyní pevně zvolený systém uzavřených množin daného polského prostoru X . Dále označme

$$\mathcal{I}^{\text{perf}} = \{A \subset X; A \neq \emptyset \text{ a pro každou } U \in \Sigma_1^0(X), U \cap A \neq \emptyset \text{ máme } U \cap A \notin \mathcal{I}^{\text{ext}}\},$$

$$\ker A = A \setminus \bigcup \{U \subset X; U \text{ je otevřená a } U \cap A \in \mathcal{I}^{\text{ext}}\},$$

$$\text{MGR}(Y) = \{Z \subset Y; Z \text{ je první kategorie v } Y\}, \quad Y \subset X.$$

Lemma 3.2.3. Necht $A \in \Sigma_1^1(X) \setminus \mathcal{I}^{\text{ext}}$. Pak existuje Suslinovo schéma $(A_s)_{s \in \omega^\omega}$ sestávající z uzavřených množin takové, že

- (i) $A_\emptyset \neq \emptyset$,
- (ii) $\mathcal{A}_s A_s \subset A$,
- (iii) jestliže $A_s \neq \emptyset$, pak $A \cap A_s \in \mathcal{I}^{\text{perf}}$ a $A \cap A_s$ je hustá v A_s ,
- (iv) $\bigcup_{n \in \omega} A_s^{\wedge n}$ je hustou podmnožinou A_s .

Důkaz. Necht $(H_s)_{s \in \omega^{<\omega}}$ sestává z uzavřených podmnožin X a $A = \mathcal{A}_s H_s$. Pro $s \in \omega^{<\omega}$ položme

$$L_s = \mathcal{A}_t H_s^{\wedge t}, \quad A_s = \overline{\ker(L_s)}.$$

Ověření vlastností (i)–(iv).

(i) Platí $A_\emptyset = \overline{\ker(L_\emptyset)} = \overline{\ker(A)} \neq \emptyset$.

(ii) Platí $L_s \subset H_s$, H_s je uzavřená, a tedy $A_s \subset H_s$. Odtud pak okamžitě

$$\mathcal{A}_s A_s \subset \mathcal{A}_s H_s = A.$$

(iii) Platí $\ker(L_s) \subset A \cap A_s$ a $\ker(L_s)$ je hustá v A_s . Odtud také $A \cap A_s \neq \emptyset$, pokud $A_s \neq \emptyset$. Zvolme $U \subset X$ otevřenou takovou, že $U \cap A \cap A_s \neq \emptyset$. Pak $U \cap \ker(L_s) \neq \emptyset$, a tedy $U \cap \ker(L_s) \notin \mathcal{I}^{\text{ext}}$. Odtud potom $U \cap A \cap A_s \notin \mathcal{I}^{\text{ext}}$.

(iv) Inkluze $\bigcup_{n \in \omega} A_{s \wedge n} \subset A_s$ plyne přímo z definice A_s . Uvažujme nyní opět otevřenou množinu $U \subset X$ protínající A_s . Pak $U \cap \ker(L_s) \neq \emptyset$ a navíc $U \cap L_s \notin \mathcal{I}^{\text{ext}}$. Platí také $L_s = \bigcup_{n \in \omega} L_{s \wedge n}$, takže existuje $n_0 \in \omega$ takové, že $U \cap L_{s \wedge n_0} \notin \mathcal{I}^{\text{ext}}$. Odtud plyne $U \cap A_{s \wedge n_0} \neq \emptyset$. ■

————— Konec 10. přednášky, 12.12. 2013 —————

Důkaz věty. Mějme $A \in \Sigma_1^1(X) \setminus \mathcal{I}^{\text{ext}}$ a $A_s, s \in \omega^{<\omega}$, nechť jsou jako v Lemmatu 3.2.3. Rozlišíme dva případy.

1. *případ:* $\exists s \in \omega^{<\omega} \exists$ otevřená $U \subset X : A_s \cap U \neq \emptyset \ \& \ \text{MGR}(A_s \cap U) \subset \mathcal{I}^{\text{ext}}$.

Položme $\tilde{A} := A \cap A_s \cap U$. Podle (iii) z Lemmatu máme $\tilde{A} \in \mathcal{I}^{\text{perf}} \cap \Sigma_1^1(X)$. Pak má $\tilde{A}$ Baireovu vlastnost v prostoru $A_s \cap U$, tj. $\tilde{A} = H \cup M$, kde $H \in \Pi_2^0(A_s \cap U)$ a M je první kategorie v $A_s \cap U$. Odtud snadno plyne $M \in \mathcal{I}^{\text{ext}}$ a $H \in \Pi_2^0(X) \setminus \mathcal{I}^{\text{ext}}$.

2. *případ:* $\forall s \in \omega^{<\omega} \forall$ otevřenou $U \subset X, U \cap A_s \neq \emptyset : \text{MGR}(A_s \cap U) \setminus \mathcal{I}^{\text{ext}} \neq \emptyset$.

Označení: Je-li $\mathcal{F} \subset 2^X$, pak $\mathcal{F}^d := \bigcup \mathcal{F} \setminus \bigcup \{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$.

Na prostoru X zvolme pevně úplnou kompatibilní metriku. Induktivně budeme definovat $\varphi : \omega^{<\omega} \rightarrow \omega^{<\omega}$ a $U_s \subset X, s \in \omega^{<\omega}$, takové, že platí

- (1) $|\varphi(s)| = |s|$; $\varphi(s) \prec \varphi(t)$, kdykoliv $s \prec t$,
- (2) U_s je otevřená,
- (3) $\text{diam } U_s \leq 2^{-|s|}$,
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } U_{s \wedge n} = 0$,
- (5) $\forall t \in \omega^{<\omega}, t \prec s, t \neq s : \overline{U_s} \subset U_t$,
- (6) $U_{s \wedge m} \cap U_{s \wedge n} = \emptyset$ pro $n, m \in \omega, n \neq m$,
- (7) $U_s \cap A_{\varphi(s)} \neq \emptyset$,
- (8) $\{U_{s \wedge n} : n \in \omega\}^d \notin \mathcal{I}^{\text{ext}}$,
- (9) $\{U_{s \wedge n} : n \in \omega\}^d \subset U_s$.

Konstrukce φ a U_s .

Položme $\varphi(\emptyset) = \emptyset$ a za $U_\emptyset$ vezmeme libovolnou otevřenou množinu protínající $A_\emptyset$. Předpokládejme, že U_s a $\varphi(s)$ jsou definovány pro všechna $s \in \omega^{<\omega}$ splňující $|s| \leq N$. Vezmeme $s \in \omega^{<\omega}$ délky N . Pak máme $U_s \cap A_{\varphi(s)} \neq \emptyset$ (podle (7)) a $\text{MGR}(A_{\varphi(s)} \cap U_s) \setminus \mathcal{I}^{\text{ext}} \neq \emptyset$. Existuje tedy uzavřená množina $K \subset A_{\varphi(s)} \cap U_s$, která je řídká v $A_{\varphi(s)} \cap U_s$, a $K \notin \mathcal{I}^{\text{ext}}$.

Nalezneme množinu $D \subset A_{\varphi(s)} \cap U_s$ splňující:

- D je diskrétní v $X \setminus K$,
- $D \cap K = \emptyset$,
- $\overline{D} = K \cup D$.

Stačí zvolit posloupnost $(y_n)_{n \in \omega}$, jejíž prvky tvoří hustou množinu v K a v níž se každý prvek vyskytuje nekonečně krát, a pro každé $n \in \omega$ nalézt $x_n \in (A_{\varphi(s)} \cap U) \setminus K$ takové, že $\rho(x_n, y_n) < 1/n$. Nechť $D = \{x_n : n \in \omega\}$, kde $x_n \neq x_m$ pro $n, m \in \omega, n \neq m$. Nechť $U_{s \wedge n}, n \in \omega$, jsou otevřené koule takové, že

- $U_{s \wedge n}$ má střed v x_n ,
- $\overline{U_{s \wedge n}} \subset U_s$,
- $U_{s \wedge n} \cap U_{s \wedge m} = \emptyset$ pro $n, m \in \omega, n \neq m$,
- $\text{diam } U_{s \wedge n} \leq 2^{-|s|^{-1}}$,

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } U_{s^\wedge n} = 0$,
- $\{U_{s^\wedge n}; n \in \omega\}^d = K$.

Poněvadž $x_n \in A_{\varphi(s)}$ máme $U_{s^\wedge n} \cap A_{\varphi(s)} \neq \emptyset$. Pro každé $n \in \omega$ nalezneme $k \in \omega$ takové, že $U_{s^\wedge n} \cap A_{\varphi(s)^\wedge k} \neq \emptyset$ (podle (iv) v Lemmatu 3.2.3). Položíme $\varphi(s^\wedge n) = \varphi(s)^\wedge k$. Tím je konstrukce φ a U_s provedena.

Položme

$$H = \bigcap_{n \in \omega} \bigcup \{U_s; s \in \omega^{<\omega}, |s| = n\}.$$

Množina H je Π_2^0 podle (2). Zbývá ukázat, že $H \subset A$ a $H \notin \mathcal{I}^{\text{ext}}$.

- Inkluze $H \subset A$. Vlastnosti (5) a (6) implikují rovnost

$$H = \bigcup_{v \in \omega^{<\omega}} \bigcap_{n \in \omega} U_{v|n}.$$

Protože $\text{diam } U_{v|n} \leq 2^{-n}$ a $U_{v|n} \cap A_{\varphi(v|n)} \neq \emptyset$, tak máme

$$\bigcap_{n \in \omega} U_{v|n} \subset \bigcap_{n \in \omega} A_{\varphi(v|n)} \subset A.$$

• Množina H není prvkem $\mathcal{I}^{\text{ext}}$. Pro každé $v \in \omega^\omega$ platí $\bigcap_{n \in \omega} U_{v|n} \neq \emptyset$ díky úplnosti X , (3) a (5). Odtud vidíme, že $U_s \cap H \neq \emptyset$ pro každé $s \in \omega^{<\omega}$. Předpokládejme, že $H \subset \bigcup_{m \in \omega} F_m$, $F_m \in \mathcal{I}$. Pak podle Baireovy věty existuje $m_0 \in \omega$ a $s \in \omega^{<\omega}$ takové, že $H \cap U_s \subset F_{m_0}$. Pak ovšem díky (4)

$$\{U_{s^\wedge n}; n \in \omega\}^d \subset F_{m_0},$$

což je spor podle (8). ■

————— Konec 11. přednášky, 2.1. 2014 —————

Věta 3.2.4 (Perfect Set Theorem). Necht X je polský a $A \in \Sigma_1^1(X)$ je nespočetná. Pak existuje homeomorfní kopie C prostoru 2^ω obsažená v A .

14.13

Důkaz. Položme $\mathcal{I} = \{\{x\}; x \in X\}$. Pak máme $A \in \Sigma_1^1(X) \setminus \mathcal{I}^{\text{ext}}$ a podle Věty 3.2.1 existuje $H \subset A$ taková, že $H \in \Pi_2^0(X) \setminus \mathcal{I}^{\text{ext}}$. Položme $G = \ker(H)$. Víme $G \in \Pi_2^0(X) \cap \mathcal{I}^{\text{perf}}$. Nyní stačí provést v G klasickou cantorovskou konstrukci.

Konstrukce C . Necht τ je ekvivalentní úplná metrika na G . Nalezneme otevřené koule B_s , $s \in 2^{<\omega}$, v (G, τ) takové, že

- $\overline{B_{s^\wedge 0}} \cup \overline{B_{s^\wedge 1}} \subset B_s$, $\overline{B_{s^\wedge 0}} \cap \overline{B_{s^\wedge 1}} = \emptyset$,
- $\text{diam}_\tau B_s \leq 2^{-|s|}$.

Konstrukce využívá nespočetnosti každé otevřené koule v G . Potom $C = \bigcap_{n \in \omega} \bigcup_{s \in \omega^n} B_s$ je homeomorfní 2^ω . ■

Poznámka 3.2.5. Tvrzení Věty 3.2.4 nelze pro koanalytické množiny v ZFC dokázat ani vyvrátit.

Nekonečné hry a jejich použití

4.1. Základní definice

20.A

Nechť A je neprázdná množina a $X \subset A^\omega$. Ve hře $G(X)$ střídavě volí hráči I a II prvky $a_i, i \in \omega$, z množiny A :

$$\begin{array}{ccccccc} I & & a_0 & & a_2 & & \dots \\ II & & & a_1 & & a_3 & \dots \end{array}$$

Hráč I vítězí právě tehdy, když $(a_i) \in X$, jinak vítězí II .

Strategií pro hráče I rozumíme zobrazení $\varphi : A^{<\omega} \rightarrow A^{<\omega}$ takové, že

- $\forall s \in A^{<\omega} : |\varphi(s)| = |s| + 1$,
- $\forall s, t \in A^{<\omega}, s < t : \varphi(s) < \varphi(t)$.

Zobrazení φ určuje tahy hráče I takto: $\varphi(\emptyset) = (a_0), \varphi((a_1)) = (a_0, a_2), \dots$

Ďalší pohled na strategii pro I Řekneme, že $\sigma \subset A^{<\omega}$ je **strom**, jestliže

$$\forall s, t \in A^{<\omega}, s < t : t \in \sigma \Rightarrow s \in \sigma.$$

Řekneme, že strom $\sigma \subset A^{<\omega}$ je **prořezaný**, jestliže

$$\forall s \in \sigma \exists a \in A : s^\frown a \in \sigma.$$

Strategie pro I je strom $\sigma \subset A^{<\omega}$ takový, že

- σ je neprázdný a prořezaný,
- pokud $(a_0, \dots, a_{2j}) \in \sigma$, pak pro každé $a_{2j+1} \in A$ platí $(a_0, \dots, a_{2j}, a_{2j+1}) \in \sigma$,
- pokud $(a_0, \dots, a_{2j-1}) \in \sigma$, pak pro právě jedno $a_{2j} \in A$ platí $(a_0, \dots, a_{2j-1}, a_{2j}) \in \sigma$.

Strategie σ pro I je **vítězná**, jestliže s ní I vyhraje při libovolné volbě tahů hráče II , neboli

$$[\sigma] := \{x \in A^\omega : x|n \in \sigma \text{ pro každé } n \in \omega\} \subset X.$$

Analogicky definujeme **strategii pro hráče II** a **vítěznou strategii pro hráče II** .

Poznámka 4.1.1. Ve hře $G(A, X)$ nemohou mít oba hráči vítěznou strategii. Nemusí ji mít ani jeden.

Příklad 4.1.2. Nechť $A = \{0, 1\}$ a $X \subset 2^\omega$ je **Bernsteinova množina**, tj. pro každou perfektní $F \subset 2^\omega$ platí $F \cap X \neq \emptyset$ a $F \cap (2^\omega \setminus X) \neq \emptyset$. Pak v $G(A, X)$ nemá žádný hráč vyhrávající strategii.

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že $\varphi : 2^{<\omega} \rightarrow 2^{<\omega}$ je vítězná strategie pro I . Definujme $\varphi^* : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$ takto:

$$\varphi^*(a_1, a_3, a_5, \dots) = (a_0, a_1, a_2, \dots),$$

kde $\varphi((a_1, a_3, \dots, a_{2j-1})) = (a_0, a_2, \dots, a_{2j}), j \in \omega$.

Zobrazení φ^* je spojité, neboť pro libovolná $\mu, \nu \in 2^\omega, k \in \omega$, splňující $\mu|k = \nu|k$ máme $\varphi(\mu|k) = \varphi(\nu|k)$. Pak ovšem $\varphi^*(2^\omega) \subset X$ je kompaktní (spojitý obraz kompaktu) a nespočetná (prostý obraz 2^ω). Množina X tedy obsahuje neprázdnou perfektní podmnožinu, což je spor s definicí X .

Pokud má dle našeho předpokladu II vítěznou strategii, pak obdržíme spor stejným způsobem. ■

Poznámka 4.1.3. Výše uvedený postup ukazuje, že vítězná strategie určuje jisté spojitě zobrazení z A^ω do A^ω , které může mít zajímavé vlastnosti.

Hra s pravidly

Mějme $T \subset A^{<\omega}$ prořezaný strom a $X \subset [T]$.

$$\begin{array}{ccccccc} I & & a_0 & & a_2 & & \dots \\ II & & & a_1 & & a_3 & \dots \end{array}$$

Pro každé $n \in \omega$ musí platit $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in T$. Strom T určuje tzv. **přípustné pozice**. Vítězství pro I či II a pojem vítězné strategie jsou definovány zřejmým způsobem.

Poznámka 4.1.4. Ve skutečnosti není tato hra „obecnější“ než předchozí. Položíme-li

$$X' = \{x \in A^\omega; (\exists n \in \omega : x|n \notin T \text{ \& nejmenší } n \in \omega \text{ takové, že } x|n \notin T \text{ je sudé}) \text{ nebo } x \in [T] \cap X\},$$

pak I (resp. II) má vyhrávající strategii v $G(X')$, právě když I (resp. II) má vyhrávající strategii v $G(T, X)$.

4.2. Příklady her

4.2.1. Separační hra $SG(A; B_0, B_1)$. Necht S, T jsou neprázdné prořezané stromy na ω , $A \subset [S]$ a $B_0, B_1 \subset [T]$.

$$\begin{array}{ccccccc} I & & x(0) & & x(1) & & \dots \\ II & & & y(0) & & y(1) & \dots \end{array}$$

Pravidla hry: $x(i), y(i) \in \omega, x|n \in S, y|n \in T$. Hráč II vítězí právě tehdy, když

$$(x \in A \Rightarrow y \in B_0) \text{ \& } (x \notin A \Rightarrow y \in B_1).$$

Hra je užitečným nástrojem při zkoumání borelovských množin. Ještě se k ní vrátíme.

4.2.2. Banach-Mazurova hra $G^{}(M, Y)$.** Necht M je podmnožinou neprázdného topologického prostoru Y .

$$\begin{array}{ccccccc} I & & U_0 & & U_1 & & \dots \\ II & & & V_0 & & V_1 & \dots \end{array}$$

Pravidla hry: U_i, V_i jsou neprázdné otevřené množiny, $U_i \supset V_i \supset U_{i+1}, i \in \omega$. Hráč II vítězí právě tehdy, když $\bigcap_{n \in \omega} V_n \subset M$.

4.2.3. Hra bod-přímka (J. Malý). Necht B je jednotková koule v $\mathbf{R}^2$.

$$\begin{array}{cccc} I & a_0 & a_1 & \dots \\ II & p_0 & p_1 & \dots \end{array}$$

Pravidla hry: $a_i \in B$, p_i je přímka v $\mathbf{R}^2$, $a_{i+1} \in p_i$ a $p_i \ni a_i$. Hráč II vítězí právě tehdy, když $(a_i)_{i \in \omega}$ konverguje.

Věta 4.2.1. Hráč II má vítěznou strategii ve hře bod-přímka ([?]).

Bez důkazu.

4.3. Determinovanost her

Definice 4.3.1. Řekneme, že hra $G(A, X)$ je **determinovaná**, pokud I nebo II má vítěznou strategii.

Poznámka 4.3.2.

Hráč I vyhraje: $\exists a_0 \forall a_1 \exists a_2 \dots : (a_0, a_1, \dots) \in X$.

Hráč II vyhraje: $\forall a_0 \exists a_1 \forall a_2 \dots : (a_0, a_1, \dots) \in X$.

Toto ale nejsou korektně utvořené formule!

Věta 4.3.3 (Gale-Stewart, 1953). Necht $A \neq \emptyset$ a $T \subset A^{<\omega}$ je neprázdný prořezaný strom. Necht $X \subset [T]$ je uzavřená v $[T]$. Pak $G(T, X)$ je determinována.

20.1

Důkaz. Necht II nemá vítěznou strategii v $G(T, X)$. Budeme hledat vítěznou strategii pro I. Řekneme, že $p = (a_0, \dots, a_{2n-1}) \in T$ je *neprohrávající pozice pro I*, jestliže II nemá vítěznou strategii ve hře s tímto začátkem. Pokud p je taková pozice, pak existuje $a_{2n} \in A$ takové, že

- $(a_0, \dots, a_{2n}) \in T$,
- pro každé $a_{2n+1} \in A$ splňující $(a_0, \dots, a_{2n}, a_{2n+1}) \in T$ je tato pozice neprohrávající pro hráče I.

Konstrukce vítězné strategie pro I

Hráč I volí své tahy tak, aby se nacházel vždy v neprohrávající pozici. To je možné podle předpokladu neexistence vítězné strategie pro II a výše uvedeného pozorování.

Kdyby tato strategie nebyla vítězná, pak jistě $(a_0, a_1, \dots) \in [T]$, jež bylo sehráno podle uvedené strategie, není v X . Množina $[T] \setminus X$ je otevřená v $[T]$, a tedy pro určité $n \in \omega$ platí $\mathcal{N}(a_0, \dots, a_{2n-1}) \cap [T] \subset [T] \setminus X$. Pak ale hráč II může hrát cokoli podle pravidel a vyhraje, což znamená, že pozice $(a_0, \dots, a_{2n-1})$ není neprohrávající pro I. To je ale spor. ■

Poznámka 4.3.4. Uzavřenost množiny X je v důkazu věty pro použitou metodu podstatná. Uvažujme následující příklad: $X = 2^\omega \setminus \{(0, 0, 0, \dots)\}$, $A = \{0, 1\}$, $T = 2^{<\omega}$. V partii

$$\begin{array}{cccc} I & 0 & 0 & \dots \\ II & 0 & 0 & \dots \end{array}$$

je pozice $(0, 0, \dots, 0)$ vždy neprohrávající pro I, ale nakonec $(0, 0, \dots) \notin X$.

Důsledek 4.3.5. Necht T je neprázdný prořezaný strom na A . Necht $X \subset [T]$ je otevřená v $[T]$. Pak $G(T, X)$ je determinována.

Důkaz. Buď lze postupovat analogicky předchozímu důkazu nebo necháme I zahrát první tah a_0 . Potom uvažujeme novou hru, kde začíná hrát II tahem a_1 , atd. Taková hra je podle Věty 4.3.3 determinována a to snadno dává determinovanost původní hry. ■

Poznámka 4.3.6. Z historie: Hra $G(T, X)$ je determinována pro

- $X \in \Pi_1^0$ (Gale-Stewart, 1953),
- $X \in \Pi_2^0$ (Woolfe, 1955),
- $X \in \Pi_3^0$ (Davis, 1964),
- $X \in \Pi_4^0$ (Paris, 1972).

20.5

Věta 4.3.7 (Martin, [?]). Necht T je neprázdný prořezaný strom na A a $X \subset [T]$ je borelovská. Pak $G(T, X)$ je determinovaná.

Bez důkazu.

4.4. Perfect Set Theorem a nekonečné hry

Necht X je neprázdný polský prostor a d je kompatibilní úplná metrika na X . Necht $\mathcal{V} = (V_n)$ je báze X sestávající z neprázdných otevřených množin a $A \subset X$. Hru $G^*(A)$ definujeme takto

$$\begin{array}{ccccccc} I & & (U_0^{(0)}, U_1^{(0)}) & & (U_0^{(1)}, U_1^{(1)}) & & \dots \\ II & & & i_0 & & i_1 & \dots \end{array}$$

kde

- $U_i^{(n)} \in \mathcal{V}$, $\text{diam } U_i^{(n)} < 2^{-n}$,
- $\overline{U_0^{(n)}} \cap \overline{U_1^{(n)}} = \emptyset$,
- $\overline{U_0^{(n+1)}} \cup \overline{U_1^{(n+1)}} \subset U_{i_n}^{(n)}$,
- $i_n \in \{0, 1\}$.

Prvek $x \in X$ je definován jako $\{x\} = \bigcap_{n \in \omega} U_{i_n}^{(n)}$. Hráč I vítězí, právě když $x \in A$.

21.1

Věta 4.4.1. Necht X je neprázdný perfektní polský prostor a $A \subset X$. Potom

- hráč I má vítěznou strategii právě tehdy, když A obsahuje Cantorovu množinu,
- hráč II má vítěznou strategii právě tehdy, když A je spočetná.

Důkaz. (i) Vítězná strategie pro prvního hráče dává schéma $(U_s)_{s \in 2^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}}$ takové, že

- U_s je neprázdná a otevřená,
- $\overline{U_{s \wedge 0}} \cup \overline{U_{s \wedge 1}} \subset U_s$, $\overline{U_{s \wedge 0}} \cap \overline{U_{s \wedge 1}} = \emptyset$,
- $\text{diam } U_s < 2^{-|s|+1}$,
- $\forall y \in 2^\omega : \bigcap_{n=1}^\infty U_{y|n}$ je jednoprvková množina obsažená v A .

Odtud snadno plyne, že A obsahuje Cantorovu množinu, totiž $\bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{|s|=n} U_s$.

Pokud A obsahuje Cantorovu množinu C , pak stačí, aby I volil vždy jen taková $U_i^{(n)}$, která protínají C . To k vítězství postačuje.

(ii) Předpokládejme, že A je spočetná. Necht $A = \{x_0, x_1, \dots\}$. Pak II v n -tém tahu volí takové $i_n \in \{0, 1\}$, aby $x_n \notin U_{i_n}^{(n)}$. Potom zřejmě $A \cap \bigcap_{n=1}^\infty U_{i_n}^{(n)} = \emptyset$.

Předpokládejme, že σ je vítězná strategie pro II . Necht $x \in A$. Řekneme, že pozice

$$p = ((U_0^{(0)}, U_1^{(0)}), i_0, \dots, (U_0^{(n-1)}, U_1^{(n-1)}), i_{n-1})$$

je **dobrá** pro x , jestliže byla hrána podle σ a $x \in U_{i_{n-1}}^{(n-1)}$. Prázdná sekvence je dobrá pro naše x podle definice. Jestliže má každá dobrá posloupnost p pro x vlastní prodloužení, které je dobré pro x , pak existuje sehraná partie podle σ , která vede k bodu $x \in A$, což je ale spor. Pro každé $x \in A$ existuje maximální dobrá posloupnost p pro x . Označme

$$A_p = \{y \in U_{i_{n-1}}^{(n-1)}; \text{ pro každé přípustné pokračování } (U_0^{(n)}, U_1^{(n)}) \text{ platí:}$$

je-li i tah, který požaduje σ , pak $y \notin U_i^{(n)}\}$.

Pak máme $A \subset \bigcup_p A_p$, navíc A_p obsahuje nejvýše jeden bod. Kdyby $y_0, y_1 \in A_p$ a $y_0 \neq y_1$, pak je možné zvolit $U_0^{(n)}$ a $U_1^{(n)}$ tak, že $y_i \in U_i^{(n)}$. Odtud plyne spočetnost A . ■

Hra G_u^ (unfolded verze hry G^*)*

Nechť X je neprázdný perfektní polský prostor, $F \subset X \times \omega^\omega$.

$$\begin{array}{ccccccc} I & y(0), (U_0^{(0)}, U_1^{(0)}) & y(1), (U_0^{(1)}, U_1^{(1)}) & \dots & & & \\ II & & i_0 & & i_1 & & \dots \end{array}$$

kde

- $U_i^{(n)}, i_n$ jsou jako v předchozí hře,
- $y(n) \in \omega$,
- $x \in X$ je definováno jako v předchozí hře,
- $y = (y(0), y(1), y(2), \dots)$.

Hráč I vítězí, právě když $(x, y) \in F$.

Věta 4.4.2. Nechť X je neprázdný perfektní polský prostor, $F \subset X \times \omega^\omega$ a $A = \pi_X(F)$. Pak

21.2

- (i) jestliže hráč I má vítěznou strategii v $G_u^*(F)$, pak A obsahuje Cantorovu množinu;
- (ii) jestliže hráč II má vítěznou strategii v $G_u^*(F)$, pak A je spočetná.

Důkaz. (i) Pokud má I vyhrávající strategii v $G_u^*(F)$, pak má I vyhrávající strategii i v $G^*(A)$, a tedy A obsahuje Cantorovu množinu podle Věty 4.4.1.

(ii) Nechť nyní má II vítěznou strategii σ v $G_u^*(F)$. Nechť $(x, y_0) \in F$. Podobně jako v předchozím důkazu musí existovat maximální dobrá pozice pro (x, y_0)

$$p = (y_0(0), (U_0^{(0)}, U_1^{(0)}), i_0, \dots, y_0(n-1), (U_0^{(n-1)}, U_1^{(n-1)}), i_{n-1}),$$

tj. $p \in \sigma$ a $x \in U_{i_{n-1}}^{(n-1)}$. Položme

$$A'_{p,a} = \{z \in U_{i_{n-1}}^{n-1}; \text{ pro každé přípustné pokračování } (a, (U_0^{(n)}, U_1^{(n)})),$$

jestliže i je požadováno strategií σ , pak $z \notin U_i^{(n)}\}$.

Pokud $a = y_0(n)$ a p je jako výše, pak máme $x \in A'_{p,a}$. Potom $A \subset \bigcup_{p \in \sigma, a \in \omega} A'_{p,a}$ a každé $A'_{p,a}$ obsahuje nejvýše jeden element. Odtud plyne spočetnost A . ■

Poznámka 4.4.3.

- (i) Předchozí výsledek dává jiný důkaz Perfect Set Theorem.

- (ii) Pokud budeme předpokládat determinovanost Π_1^1 her, pak dostáváme Perfect Set Theorem pro Σ_2^1 množiny. Zobrazení

$$(y(0), (U_0^{(0)}, U_1^{(0)}), i_0, \dots) \mapsto (x, y)$$

je totiž spojité.