

Písemná zkouška z Matematiky I pro FSV (E)
ZS 2024/2025

Úloha 1 (13 bodů). Spočtěte následující limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt[3]{8^n + 3^n} - \sqrt{4^n + n^2}}.$$

Úloha 2 (13 bodů). Spočtěte následující limitu funkce.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + 2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)^{\sqrt{x-1}}.$$

Úloha 3 (11 bodů). Nalezněte definiční obor a vyšetřete spojitost funkce f . Spočtěte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^3 - 2^x}.$$

Úloha 4 (13 bodů). Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{(x-2)^2}{x-1}}.$$

Řešení

Úloha 1. $\frac{3}{4}$.

Úloha 2. $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

Úloha 3. Funkce f je definovaná a spojitá na $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\log(2)(3x^2 2^{x^3-2^x})}{3 \sqrt[3]{(2x^3-2^x)^2}} & : x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}, \\ -\infty & : x = 0, \\ +\infty & : x = \pm 1. \end{cases}$$

Úloha 4. $D_f = C_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1\pm} f(x) = \pm\infty$. Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ máme $f'(x) = \frac{x}{3 \sqrt[3]{(x-1)^4(x-2)}}$, $f'_{\pm}(2) = \pm\infty$. Funkce f je rostoucí na intervalech $(-\infty, 0 >, < 2, +\infty)$, klesající na intervalech $(0, 1)$, $(1, 2 >$, nabývá lokálního minima 0 v bodě 2 a lokálního maxima $-\sqrt[3]{4}$ v bodě 0. $H_f = (-\infty, -\sqrt[3]{4}) \cup (0, +\infty)$. Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ máme $f''(x) = -\frac{2(x^2-3)}{9 \sqrt[3]{(x-1)^7(x-2)^4}}$. Funkce f je konvexní na intervalech $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(1, \sqrt{3})$, konkávní na intervalech $(-\sqrt{3}, 1)$, $(\sqrt{3}, 2)$, $(2, +\infty)$ a body $\pm\sqrt{3}$ jsou jejími inflexními body. Funkce f nemá asymptoty v $\pm\infty$.