

Písemná zkouška z Matematiky I pro FSV (D)
ZS 2024/2025

Úloha 1 (13 bodů). Spočítejte následující limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(n^n + 2^{n^2}) \sin\left(\frac{n+1}{n^2 + 2n^3}\right).$$

Úloha 2 (13 bodů). Spočítejte následující limitu funkce.

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} (\cos(\sqrt{x}) + e^x - 1)^{\frac{1}{\arcsin(\sqrt{x}) \sin(\sqrt{x})}}.$$

Úloha 3 (11 bodů). Nalezněte definiční obor a vyšetřete spojitost funkce f . Spočítejte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = (\max\{x^2 + 2x, 3x\})^2.$$

Úloha 4 (13 bodů). Vyšetřete průběh funkce. Nehleďte hodnoty lokálních maxim (body ve kterých se maxima nabývají nicméně nalezněte), globální maximum a obor hodnot. Rozhodněte, zda funkce nabývá globálního minima.

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{e^{|x-2|}}.$$

Řešení

Úloha 1. $\frac{\log(2)}{2}$.

Úloha 2. $\sqrt{e}$.

Úloha 3. Funkce f je definovaná a spojitá na $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 4(x+1)(x^2+2x) & : x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty), \\ 18x & : x \in (0, 1), \end{cases}$$

$f'_-(1) = 18$, $f'_+(1) = 24$ a tedy $f'(1)$ neexistuje.

Úloha 4. $D_f = C_f = \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Pro $x < 2$ máme $f'(x) = (x^2 + 5x - 1)e^{x-2}$, pro $x > 2$ máme $f'(x) = (-x^2 - x + 7)e^{2-x}$, $f'_-(2) = 13$ a $f'_+(2) = 1$. Funkce f je rostoucí na intervalech $\left(-\infty, \frac{-5-\sqrt{29}}{2}\right)$, $\left(\frac{-5+\sqrt{29}}{2}, \frac{-1+\sqrt{29}}{2}\right)$, klesající na intervalech $\left(\frac{-5-\sqrt{29}}{2}, \frac{-5+\sqrt{29}}{2}\right)$, $\left(\frac{-1+\sqrt{29}}{2}, +\infty\right)$, nabývá globálního minima $(2 - \sqrt{29})e^{\frac{-9+\sqrt{29}}{2}}$ v bodě $\frac{-5+\sqrt{29}}{2}$ a lokálních maxim v bodech $\frac{-5-\sqrt{29}}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{29}}{2}$. Pro $x < 2$ máme $f''(x) = e^{x-2}(x^2 + 7x + 4)$ a

pro $x > 2$ máme $f''(x) = e^{2-x}(x^2 - x - 8)$. Funkce f je konvexní na intervalech $\left(-\infty, \frac{-7-\sqrt{33}}{2}\right)$, $\left(\frac{-7+\sqrt{33}}{2}, 2\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{33}}{2}, +\infty\right)$, konkávní na intervalech $\left(\frac{-7-\sqrt{33}}{2}, \frac{-7+\sqrt{33}}{2}\right)$, $\left(2, \frac{1+\sqrt{33}}{2}\right)$ a body $\frac{-7\pm\sqrt{33}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{33}}{2}$ jsou jejími inflexními body. Asymptotou funkce f v $\pm\infty$ je $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.