

Písenná zkouška z Matematiky I pro FSV (C)
ZS 2024/2025

Úloha 1 (13 bodů). Spočítejte následující limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{n^2 + k}{n} \right) \left(\sqrt[4]{n^4 + n} - \sqrt[5]{n^5 - n^2} \right).$$

Úloha 2 (13 bodů). Spočítejte následující limitu funkce.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right) - \operatorname{arccotg}(x^2) \right)^{\sqrt{x^6 + x^5} - \sqrt{x^6 - x^5}}.$$

Úloha 3 (11 bodů). Nalezněte definiční obor a vyšetřete spojitost funkce f . Spočítejte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = \min\{\cos(x), |\sin(x)|\}.$$

Úloha 4 (13 bodů). Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x^2 + 1} \right).$$

Řešení

Úloha 1. $\frac{9}{20}$.

Úloha 2. $e^{-\frac{3}{2}}$.

Úloha 3. Funkce f je definovaná a spojitá na $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} -\sin(x) & : x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(2k\pi + \left(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right) \right), \\ \cos(x) \operatorname{sign}(\sin(x)) & : x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(2k\pi + \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right) \setminus \{0\} \right), \end{cases}$$

$f'_{\pm}(2k\pi + \frac{\pi}{4}) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f'_{\pm}(2k\pi - \frac{\pi}{4}) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f'_{\pm}(2k\pi) = \pm 1$ a tedy $f'(2k\pi \pm \frac{\pi}{4})$, $f'(2k\pi)$ neexistují, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Úloha 4. $D_f = C_f = \mathbb{R}$, f je sudá, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Pro $x \in D_f$ máme $f'(x) = \frac{-2x}{x^4 + 2x^2 + 2}$. Funkce f je rostoucí na intervalu $(-\infty, 0)$, klesající na intervalu $(0, +\infty)$ a nabývá globálního maxima $\frac{\pi}{4}$ v bodě 0. $H_f = (0, \frac{\pi}{4})$. Pro $x \in D_f$ máme $f''(x) = 2 \frac{3x^4 + 2x^2 - 2}{(x^4 + 2x^2 + 2)^2}$. Funkce f je konvexní na intervalech $(-\infty, -\sqrt{\frac{\sqrt{7}-1}{3}})$, $(\sqrt{\frac{\sqrt{7}-1}{3}}, +\infty)$, konkávní na intervalu $(-\sqrt{\frac{\sqrt{7}-1}{3}}, \sqrt{\frac{\sqrt{7}-1}{3}})$ a body $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{7}-1}{3}}$ jsou jejími inflexními body. Asymptota funkce f v $\pm\infty$ je $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.