

Písemná zkouška z Matematiky I pro FSV (A)
ZS 2024/2025

Úloha 1 (13 bodů). V závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$ spočtěte následující limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n^3 + 2n)}{\sqrt[3]{n^3 + 3n + \log(n)} - \sqrt{n^2 + 2}} n^\alpha.$$

Úloha 2 (13 bodů). Spočtěte následující limitu funkce.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{x^2 + x^3}}{\sqrt[3]{x^3 + x^4}} + \sin(x) \right)^{\cot g(x)}.$$

Úloha 3 (11 bodů). Nalezněte definiční obor a vyšetřete spojitost funkce f . Spočtěte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = (x^2 - 1) \arcsin\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right).$$

Úloha 4 (13 bodů). Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{|x^2 - 1|}}.$$

Řešení

Úloha 1. Výsledek je 9 pro $\alpha = -2$, $+\infty$ pro $\alpha > -2$ a 0 pro $\alpha < -2$.

Úloha 2. $e^{\frac{7}{6}}$.

Úloha 3. Funkce f je definovaná a spojitá na $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2x \arcsin\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right) - 2 \frac{|x^2 - 1|}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Úloha 4. $D_f = C_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, f je lichá, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm 1$, $\lim_{x \rightarrow \pm 1} f(x) = \pm\infty$. Pro $x \in D_f$ máme $f'(x) = \frac{-1}{(x^2 - 1)\sqrt{|x^2 - 1|}}$. Funkce f je rostoucí na intervalu $(-1, 1)$, klesající na intervalech $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ a nemá lokální extrém. $H_f = \mathbb{R}$. Pro $x \in D_f$ máme $f''(x) = \frac{3x}{\sqrt{|x^2 - 1|}^5}$. Funkce f je konvexní na intervalech $(0, 1)$, $(1, +\infty)$, konkávní na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ a bod 0 je její inflexní bod. Asymptoty funkce f v $\pm\infty$ jsou $y(x) = \pm 1$, $x \in \mathbb{R}$.