I. Úvod

I.1. Množiny

Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů („prvků“) do jediného celku.

- $x \in A$ … x je prvkem množiny A
- $x \notin A$ … x není prvkem množiny A
- $A \subset B$ … množina A je podmnožinou množiny B (*inkluze*)
- $A = B$ … množiny A a B mají stejné prvky; platí $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$
- $\emptyset$ … prázdná množina
- $A \cup B$ … sjednocení množin A a B
- $A \cap B$ … průnik množin A a B
- disjunktní množiny … A a B jsou disjunktní, pokud $A \cap B = \emptyset$
- $A \setminus B = \{x \in A;\ x \notin B\}$ … rozdíl množin A a B
- $A_1 \times \cdots \times A_m = \{[a_1, \ldots, a_m];\ a_1 \in A_1, \ldots, a_m \in A_m\}$ … kartézský součin

Nechť I je nějaká neprázdná množina indexů a mějme systém množin A_α, kde indexy α probíhají I.

- $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ … množina všech prvků, které patří alespoň do jedné z množin A_α
- $\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ … množina prvků, které náleží do každé z množin A_α

I.2. Výroková logika, metody důkazů

Výrok je tvrzení, o němž má smysl říci, že je pravdivé či nepravdivé.

- $\neg$, též non … *negace*
- $\&$ (někdy též $\wedge$) … *konjunkce*, logické „a“
- $\vee$ … *disjunkce* (alternativa), logické „nebo“
- $\Rightarrow$ … *implikace*
- $\Leftrightarrow$ … *ekvivalence*

Tautologie je složený výrok, který je pravdivý nezávisle na pravdivosti elementárních výroků.
Příklady tautologií:

- $A \vee \neg A$
- $\neg(A \ \& \ \neg A)$
- $\big((A \ \& \ B) \ \& \ C\big) \Leftrightarrow \big(A \ \& \ (B \ \& \ C)\big)$
- $\neg(A \ \& \ B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \ \& \ \neg B)$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \ \& \ \neg B)$
- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow B) \ \& \ (B \Rightarrow A)\big)$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

Výrokovou formou rozumíme výraz, z něhož vznikne výrok dosazením prvku (prvků) dané množiny za proměnnou (proměnné).

Obecný zápis:

$$V(x), x \in M$$

$$V(x_1, \dots, x_n), x_1 \in M_1, \dots, x_n \in M_n$$

Je-li $A(x)$, $x \in M$ výroková forma, pak výrok „Pro všechna x z M platí $A(x)$." zapisujeme

$$\forall x \in M: A(x).$$

Výrok „Existuje x z M, pro které platí $A(x)$." zapisujeme

$$\exists x \in M: A(x).$$

Výrok „Existuje jediné x z M, pro které platí $A(x)$." zapisujeme

$$\exists! x \in M: A(x).$$

Jsou-li $A(x)$, $x \in M$ a $B(x)$, $x \in M$ výrokové formy, pak

$$\forall x \in M, B(x): A(x) \quad \text{znamená} \quad \forall x \in M: (B(x) \Rightarrow A(x)),$$

$$\exists x \in M, B(x): A(x) \quad \text{znamená} \quad \exists x \in M: (A(x) \ \& \ B(x)).$$

Negace výroků s kvantifikátory:

$$\neg(\forall x \in M: A(x)) \quad \text{je totéž co} \quad \exists x \in M: \neg A(x),$$

$$\neg(\exists x \in M: A(x)) \quad \text{je totéž co} \quad \forall x \in M: \neg A(x).$$

Metody důkazů

- přímý důkaz
- nepřímý důkaz
- důkaz sporem
- matematická indukce

Věta 1 (de Morganova pravidla)**.** *Mějme množiny S, A_α, $\alpha \in I$, kde $I \neq \emptyset$. Pak platí*

$$S \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (S \setminus A_\alpha) \qquad a \qquad S \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (S \setminus A_\alpha).$$

Věta 2 (Cauchyova nerovnost)**.** *Nechť $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$ jsou reálná čísla. Pak platí*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right).$$

Příklad (iracionalita $\sqrt{2}$). Jestliže reálné číslo x řeší rovnici $x^2 = 2$, pak x není racionální.

I.3. Číselné množiny

Racionální čísla

- Množina přirozených čísel
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$
- Množina celých čísel
$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n;\ n \in \mathbb{N}\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$
- Množina racionálních čísel
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\},$$
přičemž $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$, právě když $p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1$.

Reálná čísla

Množinou reálných čísel $\mathbb{R}$ budeme rozumět množinu, na níž jsou definovány operace *sčítání* a *násobení* (značíme $+$ a $\cdot$), a relace *uspořádání* (značíme $\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah.

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení.

III. Axiom infima.

Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x + y = y + x$ (*komutativita sčítání*),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x + (y + z) = (x + y) + z$ (*asociativita sčítání*),
- v $\mathbb{R}$ existuje takový prvek (značíme ho 0 a říkáme mu *nulový prvek*), že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $x + 0 = x$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0$ (y je tzv. *opačné číslo* k číslu x, takové y je jen jedno, značíme ho $-x$),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = y \cdot x$ (*komutativita násobení*),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (*asociativita násobení*),
- v $\mathbb{R}$ existuje nenulový prvek (tzv. *jednotkový prvek*, značíme ho 1), že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $1 \cdot x = x$,
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = 1$ (takové y je jen jedno, značíme ho x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (*distributivita*).

Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení:

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon (x \leq y\ \ \&\ \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (*tranzitivita*),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon (x \leq y\ \ \&\ \ y \leq x) \Rightarrow x = y$ (*slabá antisymetrie*),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x \leq y \vee y \leq x$,
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon (0 \leq x\ \ \&\ \ 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$.

Definice. Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je *omezená zdola*, jestliže existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $x \geq a$. Takové číslo a se nazývá *dolní závorou* množiny M. Analogicky definujeme pojmy *množina omezená shora* a *horní závora*. Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je *omezená*, je-li omezená shora i zdola.

Axiom infima:

Budiž $M \subset \mathbb{R}$ neprázdná zdola omezená množina. Potom existuje jediné číslo $g \in \mathbb{R}$, které má následující vlastnosti:

(i) $\forall x \in M\colon x \geq g$,

(ii) $\forall g' \in \mathbb{R}, g' > g\ \exists x \in M\colon x < g'$.

Číslo g značíme symbolem $\inf M$ a čteme *infimum* M.

Poznámka.

- Axiom infima říká, že každá neprázdná zdola omezená množina má infimum.
- Infimum množiny M je její největší dolní závora.
- Reálná čísla existují a jsou vlastnostmi I–III určena jednoznačně.

Platí:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\colon x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$,

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}\colon -x = (-1) \cdot x$,

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$,

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon x^{-n} = (x^{-1})^n$,

(v) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon (x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow xy > 0$,

(vi) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0\ \forall y \in \mathbb{R}, y \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}: x < y \Leftrightarrow x^n < y^n$.

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Značíme:

- *Otevřený interval* $(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$,
- *Uzavřený interval* $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$,
- *Polootevřený interval* $\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$,
- *Polootevřený interval* $(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$.

Bod a se nazývá *levý krajní bod intervalu*, bod b se nazývá *pravý krajní bod intervalu*. Bod, který je prvkem intervalu, ale není jeho krajním bodem, je tzv. *vnitřním bodem intervalu*.

Neomezené intervaly:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}, \quad (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R};\ x < a\},$$

analogicky definujeme $(-\infty, a\rangle$, $\langle a, +\infty)$ a $(-\infty, +\infty)$. Platí $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Přeneseme-li sčítání a násobení z $\mathbb{R}$ na uvedené množiny, dostaneme operace, na něž jsme na těchto užších číselných množinách zvyklí.

Reálné číslo, které není číslem racionálním, nazveme číslem *iracionálním*. Množina $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ se nazývá *množinou čísel iracionálních*.

Komplexní čísla

Množinou *komplexních čísel* rozumíme množinu všech výrazů tvaru $a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Množinu komplexních čísel značíme $\mathbb{C}$. Na $\mathbb{C}$ jsou definovány operace sčítání a násobení splňující vlastnosti skupiny I a navíc platí $i \cdot i = -1$.

Věta („základní věta algebry“). *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Pak rovnice*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

má alespoň jedno řešení $z \in \mathbb{C}$.

Důsledky axiomu infima

Definice. Budiž $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $G \in \mathbb{R}$ splňující

(i) $\forall x \in M: x \leq G$,

(ii) $\forall G' \in \mathbb{R}, G' < G\ \exists x \in M: x > G'$,

nazýváme *supremem* množiny M.

Věta 3 (o supremu). *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná shora omezená množina. Pak existuje právě jedno supremum množiny M.*

Supremum množiny M značíme $\sup M$.
Platí $\sup M = -\inf(-M)$.

Definice. Budiž $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že a je *největší prvek* (*maximum*) množiny M (značíme $\max M$), jestliže a je horní závorou množiny M a $a \in M$. Analogicky definujeme *nejmenší prvek* (*minimum*) M, který značíme $\min M$.

Lemma 4. *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ a platí*

$$\forall x, y \in M\ \forall z \in \mathbb{R}, x < z < y: z \in M.$$

Pak M je interval.

Věta 5 (Archimédova vlastnost). *Ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $x < n$.*

Věta 6 (existence celé části). *Pro každé $r \in \mathbb{R}$ existuje celá část čísla r, tj. číslo $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $k \leq r < k + 1$. Celá část čísla r je určena jednoznačně a značíme ji $[r]$.*

Věta 7 (o n-té odmocnině). *Ke každému $x \in \langle 0, +\infty)$ a ke každému $n \in \mathbb{N}$ existuje jediné $y \in \langle 0, +\infty)$ splňující $y^n = x$.*

Věta 8 (o hustotě $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). *Buďte $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom existuje $r \in \mathbb{Q}$ splňující $a < r < b$ a $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ splňující $a < s < b$.*

II. Limita posloupnosti

II.1. Úvod

Definice. Jestliže každému přirozenému číslu n je přiřazeno reálné číslo a_n, potom říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *posloupnost* reálných čísel. Číslo a_n nazveme *n-tým členem* této posloupnosti.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovna posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže platí $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Množinou členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rozumíme množinu

$$\{x \in \mathbb{R};\ \exists n \in \mathbb{N} : a_n = x\}.$$

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- *shora omezená*, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- *zdola omezená*, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- *omezená*, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- *rostoucí*, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- *klesající*, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- *nerostoucí*, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- *neklesající*, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je *monotónní*, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek. Posloupnost $\{a_n\}$ je *ryze monotónní*, pokud je rostoucí či klesající.

Definice. Buďte $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ dvě posloupnosti reálných čísel.

- *Součtem posloupností* $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ rozumíme posloupnost $\{a_n + b_n\}$.
- Analogicky definujeme *rozdíl* a *součin posloupností*.
- Nechť všechny členy posloupnosti $\{b_n\}$ jsou nenulové. Pak *podílem posloupností* $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ rozumíme posloupnost $\{\frac{a_n}{b_n}\}$.
- Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$, pak λ-násobkem posloupnosti $\{a_n\}$ rozumíme posloupnost $\{\lambda a_n\}$.

II.2. Konvergence posloupnosti

Definice. Řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}$ je *limitou posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje takové přirozené číslo n_0, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $|a_n - A| < \varepsilon$, tj.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je *konvergentní*, pokud existuje $A \in \mathbb{R}$, které je limitou $\{a_n\}$.

Věta 9 (jednoznačnost limity)**.** *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Značíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ nebo jenom $\lim a_n = A$.

Poznámka. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim a_n = A \Leftrightarrow \lim (a_n - A) = 0 \Leftrightarrow \lim |a_n - A| = 0.$$

Věta 10. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je *vybranou posloupností* z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (nebo též *podposloupností* posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$), jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $b_k = a_{n_k}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Věta 11 (limita vybrané posloupnosti)**.** *Nechť* $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*. Jestliže platí* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$*, pak také* $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.

Poznámka. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, $A \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$. Jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon\ |a_n - A| < K\varepsilon,$$

potom $\lim a_n = A$.

Věta 12 (aritmetika limit)**.** *Nechť* $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$. *Potom platí:*

(i) $\lim(a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(iii) je-li $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$, *je* $\lim(a_n/b_n) = A/B$.

Věta 13. *Nechť* $\lim a_n = 0$ *a nechť posloupnost* $\{b_n\}$ *je omezená. Potom* $\lim a_n b_n = 0$.

Věta 14 (limita a uspořádání)**.** *Nechť* $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$.

(i) Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$. *Potom* $A \geq B$.

(ii) Nechť $A < B$. *Potom existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n < b_n$.

Věta 15 (o dvou policajtech)**.** *Buďte* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *dvě konvergentní posloupnosti a* $\{c_n\}$ *taková posloupnost, že platí:*

(i) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n \leq c_n \leq b_n$,

(ii) $\lim a_n = \lim b_n$.

Potom existuje $\lim c_n$ *a platí* $\lim c_n = \lim a_n$.

II.3. Nevlastní limita posloupnosti

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $+\infty$ (*plus nekonečno*), jestliže

$$\forall L \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n > L.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $-\infty$ (*minus nekonečno*), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n < K.$$

Věta 9 o jednoznačnosti limity platí i pro limity $+\infty$ a $-\infty$. Je-li $\lim a_n = +\infty$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ *diverguje* k $+\infty$, podobně pro $-\infty$. Je-li $\lim a_n \in \mathbb{R}$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *vlastní* limitu, je-li $\lim a_n = +\infty$ nebo $\lim a_n = -\infty$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *nevlastní* limitu.

Věta 10 pro nevlastní limity neplatí. Platí však

Věta 10'.

- *Nechť* $\lim a_n = +\infty$. *Pak posloupnost* $\{a_n\}$ *není shora omezená, je však zdola omezená.*
- *Nechť* $\lim a_n = -\infty$. *Pak posloupnost* $\{a_n\}$ *není zdola omezená, je však shora omezená.*

Věta 11 (limita vybrané posloupnosti) platí i pro nevlastní limity.

Definice. *Rozšířenou reálnou osou* rozumíme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ s následujícím rozšířením operací a uspořádání z $\mathbb{R}$:

- $a < +\infty$ a $-\infty < a$ pro $a \in \mathbb{R}$, $-\infty < +\infty$,
- $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\}$,
- $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{+\infty\}$,
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^*$, $a > 0$,
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \mp\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^*$, $a < 0$,
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$ pro $a \in \mathbb{R}$.

Některé operace nejsou definovány. Jsou to:

- $(-\infty) + (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$,

- $(+\infty)\cdot 0$, $0\cdot(+\infty)$, $(-\infty)\cdot 0$, $0\cdot(-\infty)$,
- $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{a}{0}$ pro $a \in \mathbb{R}^*$.

Věta 12' (aritmetika limit)**.** *Nechť* $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbb{R}^*$. *Potom platí:*

(i) $\lim(a_n \pm b_n) = A \pm B$, *pokud je pravá strana definována,*

(ii) $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, *pokud je pravá strana definována,*

(iii) $\lim a_n/b_n = A/B$, *pokud je pravá strana definována.*

Věta 16. *Nechť* $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$, $\lim b_n = 0$ *a existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, *platí* $b_n > 0$. *Pak* $\lim a_n/b_n = +\infty$.

Věta 14 (limita a uspořádání) a Věta 15 (o dvou policajtech) platí i pro nevlastní limity. Dokonce platí

Věta 15' (o jednom policajtovi)**.** *Buďte* $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *dvě posloupnosti.*

- *Jestliže* $\lim a_n = +\infty$ *a existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ *platí* $b_n \geq a_n$, *pak* $\lim b_n = +\infty$.
- *Jestliže* $\lim a_n = -\infty$ *a existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ *platí* $b_n \leq a_n$, *pak* $\lim b_n = -\infty$.

Definice. Budiž $A \subset \mathbb{R}$ neprázdná. Není-li A shora omezená, pak definujeme $\sup A = +\infty$. Není-li A zdola omezená, pak definujeme $\inf A = -\infty$.

Lemma 17. *Nechť* $M \subset \mathbb{R}$ *je neprázdná množina,* $G \in \mathbb{R}^*$. *Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $G = \sup M$.

(ii) Číslo G *je horní závorou* M *a existuje posloupnost* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *bodů z* M, *pro kterou* $\lim x_n = G$.

II.4. Hlubší věty o limitě posloupnosti

Věta 18 (o limitě monotónní posloupnosti)**.** *Každá monotónní posloupnost má limitu. Je-li* $\{a_n\}$ *neklesající, pak* $\lim a_n = \sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. *Je-li* $\{a_n\}$ *nerostoucí, pak* $\lim a_n = \inf\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Věta 19 (Bolzano-Weierstraß)**.** *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

III. Zobrazení

Definice. Nechť A a B jsou množiny. *Zobrazením* f *množiny* A *do množiny* B nazveme předpis, kterým každému prvku x množiny A přiřadíme jediný prvek y z množiny B. Tento prvek y značíme symbolem $f(x)$. Prvek y se pak nazývá *obrazem* prvku x, prvek x se nazývá *vzorem* prvku y.

- Symbolem $f: A \to B$ značíme, že f je zobrazením množiny A do množiny B.
- Symbolem $f: x \mapsto f(x)$ značíme, že zobrazení f přiřazuje prvku x prvek $f(x)$.
- Množinu A z definice zobrazení nazýváme *definičním oborem zobrazení* f a značíme ji symbolem D_f.

Definice. Nechť $f: A \to B$ je zobrazení.

- Podmnožina $G_f = \{[x, y] \in A \times B;\ x \in A, y = f(x)\}$ kartézského součinu $A \times B$ se nazývá *grafem zobrazení* f.
- *Obrazem* množiny $M \subset A$ při zobrazení f se nazývá množina
$$f(M) = \{y \in B;\ \exists x \in M: f(x) = y\} \quad (= \{f(x);\ x \in M\}).$$
- Množina $f(A)$ se nazývá *obor hodnot* zobrazení f. (Značíme R_f nebo H_f.)
- *Vzorem* množiny $W \subset B$ při zobrazení f nazveme množinu
$$f_{-1}(W) = \{x \in A;\ f(x) \in W\}.$$

Poznámka. Nechť $f: A \to B$, $X, Y \subset A$, $U, V \subset B$. Pak platí

- $f_{-1}(U \cup V) = f_{-1}(U) \cup f_{-1}(V)$,

- $f_{-1}(U \cap V) = f_{-1}(U) \cap f_{-1}(V)$,
- $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$,
- $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.

Definice. Nechť A, B, C jsou množiny, $C \subset A$ a $f: A \to B$. *Zúžením (restrikcí) zobrazení f na množinu C* rozumíme zobrazení $\tilde{f}: C \to B$ definované předpisem $\tilde{f}(x) = f(x)$ pro každé $x \in C$. Značíme $f|_C$.

Definice. Nechť $f: A \to B$ a $g: B \to C$ jsou dvě zobrazení. Symbolem $g \circ f$ označíme zobrazení množiny A do množiny C definované předpisem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Takto definované zobrazení se nazývá *složeným zobrazením*.

Definice. Řekneme, že zobrazení $f: A \to B$

- zobrazuje množinu A *na množinu* B, jestliže $f(A) = B$, tj. ke každému $y \in B$ existuje $x \in A$ takové, že $f(x) = y$,
- je *prosté*, jestliže rozdílným prvkům přiřazuje rozdílné hodnoty, tj.

$$\forall x_1, x_2 \in A: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

- je *bijekce A na B* (nebo též *vzájemně jednoznačné zobrazení*), jestliže je zároveň prosté a zobrazuje A na B.

Definice. Nechť $f: A \to B$ je bijekce (tj. f je prosté a na). *Inverzním zobrazením* $f^{-1}: B \to A$ rozumíme zobrazení, které každému prvku $y \in B$ přiřadí (jednoznačně určený) prvek $x \in A$ splňující $f(x) = y$.

IV. Funkce jedné reálné proměnné

IV.1. Základní pojmy

Definice. *Funkce f jedné reálné proměnné* (dále jen *funkce*) je zobrazení $f: M \to \mathbb{R}$, kde M je podmnožinou množiny reálných čísel.

Definice. Funkce $f: J \to \mathbb{R}$ je *rostoucí* na intervalu J, jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$. Analogicky definujeme funkci *klesající* (*neklesající*, *nerostoucí*) na intervalu J.

Definice. *Monotónní funkcí* (resp. *ryze monotónní funkcí*) na intervalu J rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (resp. rostoucí nebo klesající) na J.

Definice. Nechť f je funkce a $M \subset D_f$. Řekneme, že funkce f je

- *shora omezená* na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq K$,
- *zdola omezená* na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq K$,
- *omezená* na M, jestliže existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$,
- *lichá*, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = -f(x)$,
- *sudá*, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $-x \in D_f$ a $f(-x) = f(x)$,
- *periodická s periodou a*, kde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $x + a \in D_f$, $x - a \in D_f$ a $f(x+a) = f(x-a) = f(x)$.

IV.2. Limita funkce

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- *okolí bodu c* o poloměru ε jako $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,
- *prstencové okolí bodu c* o poloměru ε jako $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$.

Definice. Řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}$ je *limitou funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}$*, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in P(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Věta 20 (jednoznačnost limity)**.** *Funkce f má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu $A \in \mathbb{R}$.*

Má-li funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}$ limitu $A \in \mathbb{R}$, pak píšeme $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$.

Definice. Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* $c \in \mathbb{R}$, jestliže platí

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Poznámka. Funkce f je spojitá v bodě c, právě když platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \; \forall x \in B(c, \delta) \colon f(x) \in B(f(c), \varepsilon).$$

Definice. Nechť $\varepsilon > 0$. Okolí a prstencové okolí bodu $+\infty$ (resp. $-\infty$) definujeme takto:

$$P(+\infty, \varepsilon) = B(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty),$$
$$P(-\infty, \varepsilon) = B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon).$$

Definice. Řekneme, že $A \in \mathbb{R}^*$ je *limitou funkce* f *v bodě* $c \in \mathbb{R}^*$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \; \forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Věta 20 platí i pro $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$, tedy lze použít označení $\lim_{x \to c} f(x) = A$.

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- *pravé okolí bodu c* jako $B^+(c, \varepsilon) = \langle c, c + \varepsilon)$,
- *levé okolí bodu c* jako $B^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c\rangle$,
- *pravé prstencové okolí bodu c* jako $P^+(c, \varepsilon) = (c, c + \varepsilon)$,
- *levé prstencové okolí bodu c* jako $P^-(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c)$,
- *levé okolí bodu* $+\infty$ jako $B^-(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$,
- *pravé okolí bodu* $-\infty$ jako $B^+(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$,
- *levé prstencové okolí bodu* $+\infty$ jako $P^-(+\infty, \varepsilon) = B^-(+\infty, \varepsilon)$,
- *pravé prstencové okolí bodu* $-\infty$ jako $P^+(-\infty, \varepsilon) = B^+(-\infty, \varepsilon)$.

Definice. Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c *limitu zprava* rovnou A (značíme $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = A$), jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \; \forall x \in P^+(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme pojem *limity zleva* v bodě $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Pro limitu zleva funkce f v bodě c užíváme symbol $\lim\limits_{x \to c-} f(x)$.

Poznámka. Nechť $c \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^*$. Pak platí

$$\lim_{x \to c} f(x) = A \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to c+} f(x) = A \;\; \& \;\; \lim_{x \to c-} f(x) = A \right).$$

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě c *spojitá zprava* (resp. *zleva*), jestliže $\lim_{x \to c+} f(x) = f(c)$ (resp. $\lim_{x \to c-} f(x) = f(c)$).

Věta 21. *Nechť funkce f má vlastní limitu v bodě $c \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje $\delta > 0$, že f je na $P(c, \delta)$ omezená.*

Věta 22 (aritmetika limit)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$. Nechť $\lim_{x \to c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x \to c} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:*

(i) $\lim_{x \to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz $A + B$ definován,*

(ii) $\lim_{x \to c} f(x) g(x) = AB$, *pokud je výraz AB definován,*

(iii) $\lim_{x \to c} f(x)/g(x) = A/B$, *pokud je výraz A/B definován.*

Důsledek. *Nechť funkce f a g jsou spojité v bodě $c \in \mathbb{R}$. Pak také funkce $f + g$ a fg jsou spojité v bodě c. Pokud navíc $g(c) \neq 0$, pak také funkce f/g je spojitá v bodě c.*

Věta 23. *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$. Nechť $\lim_{x \to c} g(x) = 0$, $\lim_{x \to c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $A > 0$. Jestliže existuje $\eta > 0$ takové, že funkce g je kladná na $P(c, \eta)$, pak $\lim_{x \to c}\big(f(x)/g(x)\big) = +\infty$.*

Definice. *Polynomem* budeme rozumět každou funkci P tvaru

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Čísla $a_0, \ldots, a_n$ se nazývají *koeficienty polynomu* P.

Poznámka. Nechť $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R}, \\ Q(x) &= b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$, $b_m \neq 0$. Jestliže se polynomy P a Q rovnají (tj. $P(x) = Q(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$), pak $n = m$ a $a_0 = b_0, \ldots, a_n = b_n$.

Definice. Nechť P je polynom tvaru

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řekneme, že P je polynom *stupně* n, jestliže $a_n \neq 0$. Stupeň *nulového polynomu* (tj. konstantní nulové funkce definované na $\mathbb{R}$) definujeme jako -1.

Věta 24 (limita a uspořádání)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a existuje $\lim_{x\to c} f(x)$ a $\lim_{x\to c} g(x)$.*

(i) Jestliže $\lim_{x\to c} f(x) > \lim_{x\to c} g(x)$, pak existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon f(x) > g(x).$$

(ii) Jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall x \in P(c,\delta)\colon f(x) \leq g(x)$, potom platí

$$\lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} g(x).$$

(iii) (o dvou policajtech) Nechť existuje $\eta > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c,\eta)\colon f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Je-li navíc $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = A \in \mathbb{R}^*$, potom existuje rovněž $\lim_{x\to c} h(x)$ a rovná se A.

Důsledek. *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ a nechť existuje $\eta > 0$ takové, že g je omezená na $P(c,\eta)$. Potom $\lim_{x\to c}\big(f(x)g(x)\big) = 0$.*

Věta 25 (limita složené funkce)**.** *Nechť $c, A, B \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to c} g(x) = A$, $\lim_{y\to A} f(y) = B$ a je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:*

(P) $\exists \eta \in \mathbb{R}, \eta > 0\ \forall x \in P(c,\eta)\colon g(x) \neq A$,

(S) funkce f je spojitá v bodě A.

Potom

$$\lim_{x\to c} f\big(g(x)\big) = B.$$

Důsledek. *Nechť funkce g je spojitá v bodě $c \in \mathbb{R}$ a funkce f je spojitá v bodě $g(c)$. Potom je funkce $f \circ g$ spojitá v bodě c.*

Věta 26 (Heine)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a pro funkci f platí $\lim_{x\to c} f(x) = A$. Jestliže posloupnost $\{x_n\}$ splňuje $x_n \in D_f$, $x_n \neq c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, pak platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.*

Věta 27 (limita monotónní funkce)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Budiž funkce f monotónní na intervalu (a,b). Potom existují $\lim_{x\to a+} f(x)$ a $\lim_{x\to b-} f(x)$, přičemž platí:*

- *Je-li f na (a,b) neklesající, pak $\lim_{x\to a+} f(x) = \inf f\big((a,b)\big)$ a $\lim_{x\to b-} f(x) = \sup f\big((a,b)\big)$.*
- *Je-li f na (a,b) nerostoucí, pak $\lim_{x\to a+} f(x) = \sup f\big((a,b)\big)$ a $\lim_{x\to b-} f(x) = \inf f\big((a,b)\big)$.*

IV.3. Funkce spojité na intervalu

Definice. Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli obsahuje nekonečně mnoho bodů). Funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ je *spojitá na intervalu* J, jestliže platí:

- f je spojitá v každém vnitřním bodě J,
- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud tento bod patří do J.

Věta 28 (spojitost složené funkce na intervalu). *Nechť I a J jsou intervaly, $g\colon I \to J$, $f\colon J \to \mathbb{R}$, g je spojitá na I a f je spojitá na J. Potom funkce $f \circ g$ je spojitá na I.*

Věta 29 (Heineova věta pro spojitost na intervalu). *Nechť funkce f je spojitá na intervalu J a $c \in J$. Potom pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů intervalu J splňující $\lim x_n = c$ platí $\lim f(x_n) = f(c)$.*

Věta 30 (Bolzano, o nabývání mezihodnot). *Budiž funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a předpokládejme, že $f(a) < f(b)$. Potom pro každé $C \in (f(a), f(b))$ existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí $f(\xi) = C$.*

Věta 31 (zobrazení intervalu spojitou funkcí). *Nechť J je interval a funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ je spojitá na J. Potom je $f(J)$ interval.*

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x *maxima* (resp. *minima*) *na M*, jestliže platí

$$\forall y \in M\colon f(y) \le f(x) \quad (\text{resp. } \forall y \in M\colon f(y) \ge f(x)).$$

Bod x pak nazýváme *bodem maxima* (resp. *minima*) funkce f na množině M. Symbol $\max_M f$ (resp. $\min_M f$) označuje největší (resp. nejmenší) hodnotu, které funkce f na množině M nabývá (pokud taková hodnota existuje). Body maxima či minima souhrnně označujeme jako body *extrému*.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že funkce f má v bodě x

- *lokální maximum vzhledem k M*, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in B(x, \delta) \cap M\colon f(y) \le f(x)$,
- *lokální minimum vzhledem k M*, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in B(x, \delta) \cap M\colon f(y) \ge f(x)$,
- *ostré lokální maximum vzhledem k M*, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in P(x, \delta) \cap M\colon f(y) < f(x)$,
- *ostré lokální minimum vzhledem k M*, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall y \in P(x, \delta) \cap M\colon f(y) > f(x)$.

Bodem *lokálního extrému* rozumíme bod lokálního maxima či lokálního minima.

Věta 32 (o nabývání extrémů). *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom funkce f nabývá na $\langle a, b\rangle$ své největší hodnoty (maxima) a své nejmenší hodnoty (minima).*

Důsledek 33 (omezenost spojité funkce). *Budiž f spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom je f na $\langle a, b\rangle$ omezená.*

Věta 34 (spojitost inverzní funkce). *Budiž f spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.*

IV.4. Zavedení elementárních funkcí

Věta 35 (zavedení logaritmu). *Existuje jediná funkce (značíme ji $\log$ a nazýváme ji přirozeným logaritmem), která má tyto vlastnosti:*

(L1) $D_{\log} = (0, +\infty)$,

(L2) funkce $\log$ *je na* $(0, +\infty)$ *rostoucí,*

(L3) $\forall x, y \in (0, +\infty)\colon \log xy = \log x + \log y$,

(L4) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$.

Vlastnosti funkce logaritmus

- $\log 1 = 0$,
- $\forall x \in (0, +\infty)\colon \log(1/x) = -\log x$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall x \in (0, +\infty)\colon \log x^n = n \log x$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \log x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} \log x = -\infty$,
- funkce $\log$ je spojitá na $(0, +\infty)$,
- $H_{\log} = \mathbb{R}$,
- existuje právě jedno číslo $e \in (0, +\infty)$ splňující $\log e = 1$.

Definice. *Exponenciální funkcí* budeme rozumět funkci inverzní k funkci $\log$. Budeme ji značit symbolem $\exp$.

Vlastnosti exponenciální funkce

- $D_{\exp} = \mathbb{R}$, $H_{\exp} = (0, +\infty)$,
- funkce exp je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$,
- $\exp 0 = 1$, $\exp 1 = e$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp(-x) = 1/\exp x$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{R}\colon\ \exp(nx) = (\exp x)^n$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp x = 0$,
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$,
- $\forall r \in \mathbb{Q}\colon\ \exp r = e^r$.

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. *Obecnou mocninu* a^b definujeme jako

$$a^b = \exp(b \log a).$$

Definice. Nechť $a, b \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$. *Obecný logaritmus* $\log_a b$ definujeme jako

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}.$$

Věta 36 (zavedení funkce sinus a čísla π)**.** *Existuje jediné kladné reálné číslo (budeme ho značit π) a jediná funkce sinus (budeme ji značit* sin*), které mají následující vlastnosti:*

(S1) $D_{\sin} = \mathbb{R}$,

(S2) sin *je rostoucí na* $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$,

(S3) $\sin 0 = 0$,

(S4) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x + y) = \sin x \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - y) + \sin(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \sin y$,

(S5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Definice. Funkcí *kosinus* rozumíme funkci $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

- Funkce cos je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \pi = 0$, $\cos \pi = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x + \pi) = -\sin x$
- Funkce cos je sudá, funkce sin je lichá.
- Funkce sin a cos jsou 2π-periodické.
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ |\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$
- Funkce sin a cos jsou spojité na $\mathbb{R}$.
- $H_{\sin} = H_{\cos} = \langle -1, 1 \rangle$
- Funkce sin je rovna nule právě v bodech množiny $\{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, funkce cos je rovna nule právě v bodech množiny $\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Definice. Funkci *tangens* značíme tg a definujeme předpisem

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

pro každé reálné x, pro něž má zlomek smysl, tj.

$$D_{\operatorname{tg}} = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Symbolem cotg budeme značit funkci *kotangens*, která je definována na množině $D_{\operatorname{cotg}} = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ předpisem

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Vlastnosti funkcí tangens a kotangens

- $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = 1$
- Funkce tg i cotg jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.
- Funkce tg i cotg jsou liché.
- Funkce tg i cotg jsou π-periodické.
- Funkce tg je rostoucí na $(-\pi/2, \pi/2)$, funkce cotg je klesající na $(0, \pi)$.
- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{cotg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\pi-} \operatorname{cotg} x = -\infty$
- $H_{\operatorname{tg}} = H_{\operatorname{cotg}} = \mathbb{R}$

Definice.

- Funkcí *arkussinus* (značíme arcsin) rozumíme funkci inverzní k funkci $\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle}$.
- Funkcí *arkuskosinus* (značíme arccos) rozumíme funkci inverzní k funkci $\cos|_{\langle 0, \pi\rangle}$.
- Funkcí *arkustangens* (značíme arctg) rozumíme funkci inverzní k funkci $\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$.
- Funkcí *arkuskotangens* (značíme arccotg) rozumíme funkci inverzní k funkci $\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)}$.

Vlastnosti cyklometrických funkcí

- $D_{\arcsin} = D_{\arccos} = \langle -1, 1\rangle$, $D_{\operatorname{arctg}} = D_{\operatorname{arccotg}} = \mathbb{R}$
- Funkce arcsin a arctg jsou liché.
- Funkce arcsin a arctg jsou rostoucí, funkce arccos a arccotg jsou klesající (na svých definičních oborech).
- Funkce arcsin, arccos, arctg a arccotg jsou spojité na svých definičních oborech.
- $\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$
- $\forall x \in \langle -1, 1\rangle\colon\ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi$

IV.5. Derivace funkce

Definice. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Pak

- *derivací funkce f v bodě a* budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

- *derivací funkce f v bodě a zprava* budeme rozumět

$$f'_{+}(a) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

- *derivací funkce f v bodě a zleva* budeme rozumět

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pokud příslušné limity existují.

Definice. Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$. *Tečnou ke grafu funkce f v bodě* $[a, f(a)]$ nazveme přímku

$$T_a = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ y = f(a) + f'(a)(x-a)\right\}.$$

Věta 37. *Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Potom je funkce f v bodě a spojitá.*

Věta 38 (aritmetika derivací)**.** *Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivace a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom platí*

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

(ii) $(\alpha f)'(a) = \alpha \cdot f'(a)$,

(iii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

(iv) je-li $g(a) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Věta 39 (derivace složené funkce)**.** *Nechť funkce f má vlastní derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, funkce g má vlastní derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a $y_0 = g(x_0)$. Pak*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Věta 40 (derivace inverzní funkce)**.** *Nechť funkce f je na intervalu (a, b) spojitá a ryze monotónní a má v bodě $x_0 \in (a, b)$ derivaci $f'(x_0)$ vlastní a různou od nuly. Potom má funkce f^{-1} derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí rovnost*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Derivace elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{Z}, n < 0$,
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,
- $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $x \in (0, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$,
- $(a^x)' = a^x \log a$ pro $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,
- $(\sin x)' = \cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\cos x)' = -\sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x \in D_{\text{tg}}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pro $x \in D_{\text{cotg}}$,
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$,
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$,
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Věta 41 (nutná podmínka lokálního extrému)**.** *Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ lokální extrém. Jestliže existuje $f'(x_0)$, potom je $f'(x_0) = 0$.*

IV.6. Hlubší věty o derivaci funkce

Věta 42 (Rolle)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a funkce f má následující vlastnosti:*

(i) je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,

(ii) má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b),

(iii) platí, že $f(a) = f(b)$.

Potom existuje $\xi \in (a, b)$ splňující $f'(\xi) = 0$.

Věta 43 (Lagrange, o střední hodnotě)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b). Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Věta 44 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce)**.** *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval. Nechť f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J (množinu vnitřních bodů intervalu J označme jako $\operatorname{Int} J$) má derivaci.*

(i) Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je rostoucí na J.

(ii) Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je klesající na J.

(iii) Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je neklesající na J.

(iv) Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \operatorname{Int} J$, pak f je nerostoucí na J.

Věta 45 (výpočet jednostranné derivace)**.** *Nechť f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \to a+} f'(x)$. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí rovnost*

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+} f'(x).$$

Věta 46 (l'Hospitalovo pravidlo)**.** *Nechť funkce f a g mají na jistém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$ vlastní derivace a existuje $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Nechť platí jedna z následujících podmínek:*

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$,

(ii) $\lim_{x \to a} |g(x)| = +\infty$.

Potom existuje i $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

IV.7. Konvexní a konkávní funkce

Definice. Řekneme, že funkce f je na intervalu I

- *konvexní*, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ platí
$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2),$$
- *konkávní*, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ platí
$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2),$$
- *ryze konvexní*, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ a každé $\lambda \in (0, 1)$ platí
$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2),$$
- *ryze konkávní*, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ a každé $\lambda \in (0, 1)$ platí
$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2).$$

Lemma 47. *Funkce f je na intervalu I konvexní, právě když pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$, platí*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Definice. Nechť funkce f má na jistém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. *Druhou derivací* funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a + h) - f'(a)}{h},$$

pokud limita existuje.

Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$ a funkce f má v jistém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ vlastní n-tou derivaci (značíme ji symbolem $f^{(n)}$). Pak $(n+1)$*-ní derivací* funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n)}(a + h) - f^{(n)}(a)}{h},$$

pokud limita existuje.

Věta 48 (druhá derivace a konvexita)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ a f má na intervalu (a, b) vlastní druhou derivaci.*

(i) Jestliže $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konvexní na (a, b).

(ii) Jestliže $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je ryze konkávní na (a, b).

(iii) Jestliže $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konvexní na (a, b).

(iv) Jestliže $f''(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je konkávní na (a, b).

Definice. Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$ a T_a označuje tečnu ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$. Řekneme, že bod $[x, f(x)]$ *leží pod tečnou T_a*, jestliže

$$f(x) < f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Platí-li opačná nerovnost, řekneme, že bod $[x, f(x)]$ *leží nad tečnou T_a*.

Definice. Nechť $f'(a) \in \mathbb{R}$. Řekneme, že a je *inflexním bodem* funkce f, jestliže existuje $\Delta > 0$ takové, že platí

(i) $\forall x \in (a - \Delta, a)$: $[x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a,

(ii) $\forall x \in (a, a + \Delta)$: $[x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a,

nebo

(i) $\forall x \in (a - \Delta, a)$: $[x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a,

(ii) $\forall x \in (a, a + \Delta)$: $[x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a.

Věta 49 (nutná podmínka pro inflexi)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$ je inflexním bodem bod funkce f. Potom $f''(a)$ neexistuje nebo je rovna nule.*

Věta 50 (postačující podmínka pro inflexi)**.** *Nechť funkce f má spojitou první derivaci na intervalu (a, b) a $z \in (a, b)$. Nechť platí:*

- $\forall x \in (a, z)$: $f''(x) > 0$,
- $\forall x \in (z, b)$: $f''(x) < 0$.

Potom z je inflexním bodem funkce f.

IV.8. Průběh funkce

Definice. Přímku, která je grafem afinní funkce $x \mapsto kx + q$, $k, q \in \mathbb{R}$, nazveme *asymptotou funkce f* v $+\infty$ (resp. v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx - q) = 0, \quad \text{(resp. } \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx - q) = 0\text{)}.$$

Tvrzení 51. *Funkce f má asymptotu v $+\infty$ popsanou afinní funkcí $x \mapsto kx + q$, právě tehdy, když*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R} \quad a \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = q \in \mathbb{R}.$$

Vyšetření průběhu funkce

1. Určíme definiční obor a provedeme diskusi spojitosti funkce.
2. Zjistíme symetrie funkce: lichost, sudost, periodicita.
3. Dopočítáme limity v „krajních bodech definičního oboru“.
4. Vyšetříme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy. Určíme obor hodnot.
5. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde je funkce f konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.
6. Určíme asymptoty funkce.
7. Načrtneme graf funkce.