Matematika V.
Dynamická optimalizace

Obsah

Doporučená literatura k přednášce

M. I. Kamien, N. L. Schwartz: Dynamic Optimization,Part I. Sections 1.,2.,3.,4. (jen Cases 1,2), 8.,9, 12, 15; Part II. Sctions 1-3, 5,6,10; Appendix A, Sections 3,4.

A.C.Chiang: Dynamic Optimization, Part 1., Part 2. 2:sections 2.1, 2.2, 2.3, 2.5,3. 3: 3.1,3.2,3.3, Part 3.7:7.1-7.4, 8: 8.3 první část.

M.Halická, P. Brunovský, P. Jurča: Optimálné riadenie II, EPOS Bratislava 2012-13

1.1. Derivování funkcionálů na vektorových prostorech

Definice (Jednostranná derivace ve směru)

Nechť X je vektorový prostor, $F : X \to R, a \in X, h \in X$. Derivací funkcionálu f v bodě a zprava ve směru h rozumíme

$$\delta_+ F(a,h) = \lim_{t \to 0+} \frac{F(a+th) - F(a)}{t},$$

pokud tato limita existuje a je vlastní.

Poznámka Obdobně definujeme derivaci zleva ve směru h a značíme ji

$$\delta_- F(a,h).$$

Zajímá-li nás "oboustranná" derivace ve směru h, je v definici oboustranná limita pro $t \to 0$. Derivaci pak značíme $\delta F(a,h)$.

Definice (Maximum a minimum reálného funkcionálu)

Nechť X je reálný vektorový prostor, $M \subset X, a \in M$ a $F : M \to R$ je reálný funkcionál definovaný na množině M. Řekneme, že a je bodem minima (resp. bodem maxima) funkcionálu F na množině M, jestliže pro každé $x \in M$ platí $F(x) \geq F(a)$ (resp. $F(x) \leq F(a)$).

Věta 1.(Fermatova věta)

Nechť X je reálný vektorový prostor, $F : X \to R$ a $a \in X$. Jestliže funkcionál F má v bodě a extrém (tj. maximum nebo minimum), pak pro každé $h \in X$ platí, že derivace $\delta F(a,h)$ neexistuje nebo je rovna nule.

Důkaz

Zvolme libovolné $h \in X$ a definujme $g(t) = F(a+th)$. Funkce g je definována na R a má extrém v bodě $t = 0$. Pak buď $g'(0)$ neexistuje nebo je $g'(0) = 0$. Odtud plyne tvrzení věty.

Obecněji platí následující věta.

Věta 2.(Zobecněná Fermatova věta)

Nechť X je reálný vektorový prostor, $F : M \subset X \to R$ a úsečka s krajními body $a, a+h$ leží v M. Jestliže funkcionál F nabývá v bodě a minima vzhledem k množině M pak buď derivace $\delta_+ F(a,h)$ neexistuje nebo je nezáporná.

Důkaz:

Definujme funkci $g(t) = F(a + th)$. Za předpokladů věty 2 nabývá funkce g v bodě $t = 0$ minima vzhledem k úsečce $\langle 0, 1\rangle$, tedy pro všechna $t \in \langle 0, 1\rangle$ je $g(t) \geq g(0)$. Pak buď $g'_+(0)$ neexistuje nebo je $g'_+(0) \geq 0$. Stačí si uvědomit, že $g'_+(0) = \delta_+F(a, h)$.

Definice

Nechť X je reálný vektorový prostor a $M \subset X$. Řekneme, že množina M je konvexní, jestliže pro každé dva body $x, y \in M$ je úsečka s krajními body x, y částí M.

Zobecněnou Fermatovu větu na konvexních množinách můžeme také formulovat takto:

Věta

Nechť X je reálný vektorový prostor, M konvexní podmnožina X, $F : M \to R$. Jestliže funkcionál F nabývá v bodě $a \in M$ minima vzhledem k množině M a $h \in M$ pak buď derivace $\delta_+F(a, h)$ neexistuje a nebo je nezáporná.

1.2. Derivování integrálu

Definice(Stejnoměrně spojitá funkce)

Nechť $M \subset R^n$. Řekneme, že funkce $f : M \to R^m$ je stejnoměrně spojitá na M, jestliže platí

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall x, y \in M, ||x - y|| < \delta : ||f(x) - f(y)|| < \epsilon.$$

Věta 3.(Spojitá funkce na kompaktu)

Nechť $K \subset R^n$ je kompaktní a $f : K \to R$ je spojitá na K. Potom f je stejnoměrně spojitá na K.

Důkaz:

Větu dokážeme sporem:
Buď ϵ takové kladné číslo, že pro každé $m \in N$ existují body $x_m, y_m \in K$, pro které platí $||x_m - y_m|| < \frac{1}{m}$ a současně $|f(x_m) - f(y_m)| \geq \epsilon$.

1. Protože K je kompaktní množina, lze z posloupností $(x_m)_{m=1}^{\infty}, (y_m)_{m=1}^{\infty}$ vybrat posloupnosti $(x_{m_k})_{k=1}^{\infty}, (y_{m_k})_{k=1}^{\infty}$, které konvergují k bodům $x, y \in K$. Protože současně $||x_m - y_m|| < \frac{1}{m}$, je $x = y$.

2. Ze spojitosti funkce f v bodě x k $\epsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna $z \in K$ taková, že $||z - x|| < \delta$ platí $|f(z) - f(x)| < \epsilon$.

3. Zvolme $k_o \in N$ tak velké, aby pro všechna $k \geq k_o$ platilo $||x_{m_k} - x|| < \frac{\delta}{2}$, $||y_{m_k} - x|| < \frac{\delta}{2}$ Pak je $||x_{m_k} - y_{m_k}|| \leq ||x_{m_k} - x|| + ||y_{m_k} - x|| < \delta$ a tedy $||f(x_{m_k}) - f(y_{m_k})|| < \epsilon$, což je spor.

Věta 4 (Derivace integrálu)

Nechť $f : (a,b) \times (c,d) \to R$ je spojitá a $\partial_1 f = \frac{\partial f}{\partial y}$(= její parciální derivace podle první proměnné) existuje a je spojitá na $(a,b) \times (c,d)$. Nechť $\varphi : (a,b) \to (c,d)$ má v každém bodě intervalu (a,b) vlastní derivaci. Nechť $x_o \in (c,d)$. Položme pro $y \in (a,b)$

$$K(y) = \int_{x_o}^{\varphi(y)} f(y,x)dx.$$

Pak má funkce K v každém bodě intervalu (a,b) vlastní derivaci a platí

$$K'(y) = f(y, \varphi(y))\varphi'(y) + \int_{x_o}^{\varphi(y)} \partial_1 f(y,x)dx, \quad y \in (a,b).$$

Důkaz:

Počítejme z definice (a předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $\varphi(y+t) \geq \varphi(y)$)

$$K'(y) = \lim_{t \to 0} \frac{K(y+t) - K(y)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\int_{x_0}^{\varphi(y+t)} f(y+t,x)dx - \int_{x_0}^{\varphi(y)} f(y,x)dx) =$$

$$\lim_{t \to 0} \int_{x_0}^{\varphi(y)} \frac{f(y+t,x) - f(y,x)}{t} dx + \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_{\varphi(y)}^{\varphi(y+t)} f(y+t,x)dx = I_1 + I_2.$$

Ad I_1: K výpočtu použijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě pro funkce více proměnných a dostaneme, že pro všechna $y \in (a,b), x \in (x_o, \varphi(y)$ a dostatečně malá t existuje $\xi(t,x) \in (y, y+t)$ tak, že

$$\frac{f(y+t,x) - f(y,x)}{t} = \delta_1 f(\xi(t,x), x).$$

Funkce $\delta_1 f = \frac{\partial f}{\partial y}$ je spojitá na $M = \langle y - t_o, y + t_o \rangle \times \langle x_o, \varphi(y) \rangle$ a je zde tedy podle věty 3 stejnoměrně spojitá, tj.

$$I_3 : \forall \epsilon \in R, \epsilon > 0 \exists \delta \in R, \delta > 0 \forall [y_1, x_1], [y_2, x_2] \in M : ||[y_1 - y_2, x_1 - x_2]|| < \delta$$
$$\Rightarrow |\delta_1 f(y_1, x_1) - \delta_1 f(y_2, x_2)| < \epsilon.$$

Pro libovolné kladné ϵ zvolme $\delta > 0$ takové, že nerovnost v I_3 je splněna. Pak pro $|t| < \delta$ platí

$$|\int_{x_o}^{\varphi(y)} (\delta_1 f(\xi(t,x), x) - \delta_1 f(y,x))dx| \leq$$
$$\int_{x_o}^{\varphi(y)} |\delta_1 f(\xi(t,x), x) - \delta_1 f(y,x))|dx \leq$$
$$\int_{x_o}^{\varphi(y)} \epsilon dx = \epsilon(\varphi(y) - x_o).$$

Odtud plyne, že $I_1 = \int_{x_o}^{\varphi(y)} \delta_1 f(y,x)dx$.

Ad I_2: K výpočtu použijeme větu o střední hodnotě integrálního počtu a dostaneme, že pro všechna $t \in R, |t| < \delta$ existuje $\eta(t) \in \langle \varphi(y), \varphi(y+t) \rangle$ takové, že

$$I_2 = \lim_{t \to 0} f(y+t, \eta(t)) \frac{\varphi(y+t) - \varphi(y)}{t}.$$

Z předpokladů je f spojitá funkce obou proměnných, φ má v každém bodě vlastní derivaci a $\lim_{t\to 0} \eta(t) = \varphi(y)$. Tedy $I_2 = f(y, \varphi(y))\varphi'(y)$.

1.3. Formulace základní úlohy (P1) variačního počtu

Dáno: $T \in R, T > 0, A, Z \in R, F \in C^1 (\langle 0, T\rangle \times R \times R)$.

Hledáme: $y \in C^1(\langle 0, T\rangle), y(0) = A, y(T) = Z$ takové, že hodnota funkcionálu

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), y'(s))ds$$

je minimální (resp. maximální).

Označení

Pro funkci $F \in C^1(\langle 0, T\rangle \times R \times R)$ proměnných t, x, z, kde $t \in \langle 0, T\rangle, x \in R, z \in R$ značíme

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x,z) = \partial_1 F(t,x,z),$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x,z) = \partial_2 F(t,x,z),$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(t,x,z) = \partial_3 F(t,x,z).$$

Jedná-li se o složenou funkci $F(t, y(t), y'(t))$ značíme

$$\partial_1 F(t, y(t), y'(t)) = F_t(t, y(t), y'(t)),$$
$$\partial_2 F(t, y(t), y'(t)) = F_y(t, y(t), y'(t)),$$
$$\partial_3 F(t, y(t), y'(t)) = F_{y'}(t, y(t), y'(t)).$$

Věta 5.(Nutná podmínka pro extrém úlohy P1)

Nechť y je bodem extrému úlohy P1. Pak je y řešením Eulerovy rovnice

$$(ER) \qquad F_y(t, y(t), y'(t)) = \frac{d}{dt} F_{y'}(t, y(t), y'(t)), t \in (0, T).$$

K důkazu věty 5 budeme používat pomocná lemmata A, B a C. Jejich formulaci a důkazy uvedeme před důkazem věty 5.

Lemma A

Nechť funkce $\varphi \in C(\langle 0, T\rangle)$ *je nezáporná a* $\int_0^T \varphi(t)dt = 0$ *Pak je* $\varphi(t) = 0$ *pro všechna* $t \in \langle 0, T\rangle$.

Důkaz:

Lemma dokážeme sporem. Předpokládejme, že v bodě $x_o \in \langle 0, T\rangle$ je $\varphi(x_o) > 0$. Pak existují taková kladná δ, ϵ, že funkce ψ definovaná

$$\psi(x) \begin{cases} 0 & x \in \langle 0, T\rangle \setminus (x_o - \delta, x_o + \delta), \\ \frac{\epsilon}{\delta}(x - x_o + \delta) & x \in (x_o - \delta, x_o\rangle, \\ -\frac{\epsilon}{\delta}(x - x_o - \delta) & x \in \langle x_o, x_o + \delta) \end{cases}$$

splňuje nerovnost $0 \le \psi(x) \le \varphi(x)$ na $\langle 0, T\rangle$. Pak platí

$$0 < \int_0^T \psi(x)dx \le \int_0^T \varphi(x)dx,$$

což je spor.

Lemma B

Nechť $a, b \in C(\langle 0, T\rangle)$ *a*

$$\int_0^T (a(t)h(t) + b(t)h'(t))\, dt = 0$$

pro každou funkci $h \in C^1(\langle 0, T\rangle)$, *pro kterou je* $h(0) = h(T) = 0$. *Pak funkce* b *má na* $(0, T)$ *derivaci a platí* $b' = a$.

Důkaz:

Buď A primitivní funkce k a na $\langle 0, T\rangle$. Pak platí

$$\int_0^T a(t)h(t)dt = [A(t)h(t)]_0^T - \int_0^T A(t)h'(t)dt.$$

První člen na pravé straně rovnosti je nulový, protože $h(0) = h(T) = 0$. Máme tedy

$$\int_0^T (b(t) - A(t))h'(t)dt = 0$$

pro každé $h \in C^1(\langle 0, T\rangle)$ splňující $h(0) = h(T) = 0$. Zvolme h takto:

$$h(x) = \int_0^x (b(t) - A(t))dt + cx.$$

Pro každé $c \in R$ je $h(0) = 0$ a $h \in C^1(\langle 0, T\rangle)$. Konstantu c zvolíme tak, aby i $h(T) = 0$, tj.

$$c = -\frac{1}{T}\int_0^T (b(t) - A(t))dt.$$

Pak $h'(t) = b(t) - A(t) + c$. Dále je

$$\int_0^T (b(t) - A(t))h'(t)dt = \int_0^T (b(t) - A(t) + c)h'(t)dt = \int_0^T (b(t) - A(t) + c)^2 dt.$$

Z lemmatu A je $b - A + c = 0$, tedy b je spojitě diferencovatelná a $b' = A' = a$ na $\langle 0, T\rangle$.

Lemma C

Nechť T, F jsou jako v úloze (P1), $y, u \in C^1(\langle 0, T\rangle)$. Zvolme y a definujme zobrazení $G : C^1(\langle 0, T\rangle) \to R$ takto:

$$G(u) = \int_0^T F\left(t, y(t) + u(t), y'(t) + u'(t)\right) dt.$$

Potom

$$\delta G(0, h) =$$

$$\int_0^T \left(F_y\left(t, y(t), y'(t)\right) h(t) + F_{y'}\left(t, y(t), y'(t)\right) h'(t)\right) dt$$

pro libovolné $h \in C^1(\langle 0, T\rangle)$.

Důkaz:

Z definice derivace ve směru a z věty 4 o derivaci integrálu dostáváme

$$\delta G(0, h) = \frac{d}{dt}\int_0^T F(s, y(s) + th(s), y'(s) + th'(s))ds =$$

$$\int_0^T (F_y(s, y(s) + th(s), y'(s) + th'(s))h(s) +$$

$$F_{y'}(s, y(s) + th(s), y'(s) + th'(s))h'(s))ds.$$

Ověřte, že z předpokladů lemmatu C vyplývá, že funkce

$$f(t, s) = F(s, y(s) + th(s), y'(s) + th'(s))$$

splňuje předpoklady věty 4.

Důkaz věty 5.:

Položme $X = \{h \in C^1(\langle 0, T\rangle), h(0) = h(T) = 0\}$. Pak je X vektorový prostor a funkcionál $G : X \to R$ definovaný předpisem $G(h) = V(y + h)$ má v počátku extrém. Podle lemmatu C a podle věty 1 platí

$$\delta G(0, h) = \int_0^T (F_y(s, y(s), y'(s))h(s) + F_{y'}(s, y(s), y'(s))h'(s)ds = 0$$

pro libovolné $h \in X$. Platnost Eulerovy rovnice je pak důsledkem lemmatu B.

Poznámka

Z lemmatu B vyplývá, že je-li F jednou spojitě diferencovatelná a y je bodem minima resp. maxima funkcionálu V, pak je složená funkce $F_{y'}(s, y(s), y'(s))$ také spojitě diferencovatelná na $(0, T)$ a pravá strana v Eulerově rovnici je dobře definovaná. Je-li F dvakrát spojitě diferencovatelná, je Eulerova rovnice obyčejnou diferenciální rovnicí druhého řádu. Ve speciálních případech ji lze převést na diferenciální rovnici prvního řádu.

Speciální případy

I.$F = F(t, y')$ (F nezávisí explicitně na y)

Eulerova rovnice má pak tvar $\frac{d}{dt}F_{y'} = 0$ a tedy $F_{y'}$ je konstantní na $\langle 0, T\rangle$.

II. $F = F(y, y')$ (F nezávisí explicitně na t)

Předpokládejme, že F, y jsou tak hladké funkce, abychom Eulerovu rovnici mohli přepsat ve tvaru

$$F_{y'y'}y'' + F_{yy'}y' - F_y = 0.$$

Vynásobíme-li tuto rovnici y', dostaneme

$$F_{y'y'}y'y'' + F_{yy'}(y')^2 - F_y y' = 0$$

a levou stranu této rovnice můžeme zapsat jako $\frac{d}{dt}(y'F_{y'} - F)$. Odtud plyne, že také $y'F_{y'} - F$ je konstantní na $\langle 0, T\rangle$.

1.4 Úlohy s volným koncem

Pevný koncový čas a volná koncová hodnota (úloha P2)
Dáno: $T \in R, T > 0, A \in R, F \in C^1\left(\langle 0, T\rangle \times R \times R\right)$.
Hledáme: $y \in C^1(\langle 0, T\rangle), y(0) = A$ takové, že hodnota funkcionálu

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), y'(s))ds$$

je minimální (resp. maximální).

Věta 6.(Nutná podmínka pro extrém úlohy P2)

Nechť y je bodem extrému úlohy P2. Pak je y řešením Eulerovy rovnice

$$(ER) \qquad F_y(t, y(t), y't) = \frac{d}{dt}F_{y'}(t, y(t), y'(t)), t \in (0, T)$$

a splňuje podmínku transverzality

$$(T1) \qquad F_{y'}(T, y(T), y'(T)) = 0.$$

Důkaz věty 6.:

Položme $X = \{h \in C^1(\langle 0,T\rangle), h(0) = 0\}$. Obdobně jako v důkazu věty 5 je X vektorový prostor a funkcionál $G : X \to R$ definovaný předpisem $G(h) = V(y+h)$ má v počátku extrém. Podle lemmatu C a podle věty 1 platí

$$\delta G(0,h) = \int_0^T (F_y(s,y(s),y'(s))h(s) + F_{y'}(s,y(s),y'(s))h'(s)ds = 0 \tag{1}$$

pro libovolné $h \in X$.

1.Zvolme nejprve $h \in X, h(T) = 0$. Pak je platnost Eulerovy rovnice

$$F_y - \frac{d}{dt}F_{y'} = 0$$

důsledkem lemmatu B.

2.Buď nyní h libovolný prvek prostoru X. Druhý člen v rovnici (1) upravíme integrací per partes a dostaneme (ve zkráceném zápisu)

$$\int_0^T (F_y h + F_{y'}h')ds = \int_0^T (F_y h - \frac{d}{dt}F_{y'})hds + [F_{y'}h]_0^T = 0.$$

Z Eulerovy rovnice je integrál na pravé straně nulový. Pro všechna $h \in X$ je $h(0) = 0$, tedy i $hF_{y'}$ je nulové v bodě 0. Vzhledem k tomu, že pro $h \in X$ je $h(T)$ libovolné, je nutně také $F_{y'|T} = F_{y'}(T, y(T), y'(T)) = 0$.

Truncated vertical terminal line (úloha P3) (Koncová hodnota omezená nerovností)

Dáno: $A \in R, Z \in R, T \in R, T > 0, F \in C^1(\langle 0,T\rangle \times R \times R)$.
Hledáme: $y \in C^1(\langle 0,T\rangle), y(0) = A, y(T) \geq Z$ takové,
že hodnota funkcionálu

$$V(y) = \int_0^T F(s,y(s),y'(s))ds$$

je minimální.

Věta 7.(Nutná podmínka pro extrém úlohy P3)

Nechť y je bodem minima úlohy P3. Pak je y řešením Eulerovy rovnice

$$F_y(t,y(t),y't) = \frac{d}{dt}F_{y'}(t,y(t),y'(t)), t \in (0,T) \tag{ER}$$

a splňuje podmínky transverzality t.j. buď platí

$$y(T) > Z \text{ a současně } F_{y'}(T,y(T),y'(T)) = 0, \tag{T2}$$

nebo

$$y(T) = Z \text{ a současně } F_{y'}(T,y(T),y'(T)) \geq 0, \tag{T3}$$

Důkaz:

Položme $X = \{h \in C^1(\langle 0,T\rangle), h(0) = 0, h(T) \geq Z - y(T)\}$. (Množina X není vektorový prostor, ale je poloprostor, tedy je konvexní.) Obdobně jako v důkazu věty 5 funkcionál $G : X \to R$ definovaný předpisem $G(h) = V(y+h)$ nabývá v počátku minima vzhledem k X. Podle lemmatu C a podle věty 2 platí

$$(1) \qquad \delta_+ G(0,h) = \int_0^T (F_y(s,y(s),y'(s))h(s) + F_{y'}(s,y(s),y'(s))h'(s)ds \geq 0$$

pro libovolné $h \in X$.

1.Zvolme nejprve $h \in C^1(\langle 0,T\rangle), h(0) = h(T) = 0$. (Taková h leží v X.)Pak je platnost Eulerovy rovnice $F_y - \frac{d}{dt}F_{y'} = 0$ důsledkem lemmatu B.

2.Buď nyní h libovolný prvek prostoru X. Druhý člen v rovnici (1) upravíme integrací per partes a dostaneme (ve zkráceném zápisu)

$$\int_0^T (F_y h + F_{y'}h'ds = \int_0^T (F_y - \frac{d}{dt}F_{y'})hds + [F_{y'}h]_0^T \geq 0.$$

Z platnosti Eulerovy rovnice je integrál na pravé straně rovnosti nulový. Pro všechna $h \in X$ je $h(0) = 0$, tedy zbývá nerovnost $h(T)F_{y'}(T,y(T),y'(T)) \geq 0$.

Je-li $y(T) = Z$, je pro každé $h \in X$ splněna nerovnost $h(T) \geq 0$ a dostáváme, že i $F_{y'}(T,y(T),y'(T)) \geq 0$.

Je-li $y(T) > Z$,pak pro $h \in X$ může $h(T)$ nabývat kladných i záporných hodnot, tedy je nutně $F_{y'}(T,y(T),y'(T)) = 0$.

Volný koncový čas a koncová hodnota (úloha P4)

Dáno: $A \in R, F \in C^1(\langle 0,\infty\rangle \times R \times R)$.

Hledáme: $T \in R, T > 0, y \in C^1(\langle 0,T\rangle), y(0) = A$ takové, že hodnota funkcionálu

$$V(y) = \int_0^T F(s,y(s),y'(s))ds$$

je minimální (resp. maximální).

Věta 8.(Nutná podmínka pro extrém úlohy P4)

Nechť dvojice T, y je bodem extrému úlohy P4. Pak je y řešením Eulerovy rovnice

$$(ER) \qquad F_y(t,y(t),y't) = \frac{d}{dt}F_{y'}(t,y(t),y'(t)), t \in (0,T)$$

a splňuje podmínky transverzality

$$(T4) \qquad F_{y'}(T,y(T),y'(T)) = 0.$$

a současně

$$(T5) \qquad F(T,y(T),y'(T)) = 0.$$

Důkaz:

Poznámka: Je-li funkce $u \in C^1(\langle 0, D\rangle)$, pak existuje $u^* \in C^1(\langle 0, \infty\rangle)$ taková, že $u^*(t) = u(t)$ pro všechna $t \in \langle 0, D\rangle$.

Díky této poznámce budeme v důkazu věty předpokládat, že všechny funkce jsou definovány na $\langle 0, \infty\rangle$.

Buď

$$E = \{[\tau, h] \in R \times C^1(\langle 0, \infty\rangle); h(0) = 0\}$$
$$G(\tau, h) = \int_0^{T+\tau} F(t, y(t) + h(t), y'(t) + h'(t))dt,$$

kde $[T, y]$ je bod extrému v úloze P4. Počítejme podle věty o derivaci integrálu a lemmatu C výraz

$$\delta G((0,0),(\tau,h)) = \lim_{s\to 0} \frac{G(s\tau, sh) - G(0,0)}{s} =$$
$$\frac{d}{ds}\left(\int_0^{T+s\tau} F(t, y(t) + sh(t), y'(t) + sh'(t))dt\right)_{s=0} =$$
$$\left(\int_0^{T+s\tau} \frac{d}{ds}\{F(t, y(t) + sh(t), y'(t) + sh'(t))\}dt + \tau F_{T+s\tau}\right)_{s=0}$$
$$\left(\int_0^{T} (F_y h + F_{y'} h')dt + \tau(F(T, y(T), y'(T)))\right).$$

Podle věty 1 je

$$\int_0^{T} (F_y h + F_{y'} h')dt + \tau(F(T, y(T), y'(T))) = 0 \tag{2}$$

pro každé $[\tau, h] \in E$.

Zvolme nejprve $\tau = 0$. Pak jako v důkazu věty 6 odvodíme, že y splňuje na $\langle 0, T\rangle$ Eulerovu rovnici a podmínku transverzality T1. Rovnice (2) pak má tvar $\tau(F(T, y(T), y'(T))) = 0$ a je-li $\tau \neq 0$ dostáváme druhou podmínku transverzality $F(T, y(T), y'(T)) = 0$.

Volný koncový čas (úloha P5)

Dáno: $A, Z \in R, F \in C^1\left(\langle 0, \infty\rangle \times R \times R\right)$.

Hledáme: $T \in R, T > 0, y \in C^1(\langle 0, T\rangle), y(0) = A, y(T) = Z$ takové, že hodnota funkcionálu

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), y'(s))ds$$

je minimální (resp. maximální).

Věta 9.(Nutná podmínka pro extrém úlohy P5)

Nechť dvojice T, y je bodem extrému úlohy P5. Pak je y řešením Eulerovy rovnice

$$(ER) \qquad F_y(t, y(t), y't) = \frac{d}{dt} F_{y'}(t, y(t), y'(t)), t \in (0, T)$$

a splňuje podmínku transverzality

$$(T6) \qquad F(T, y(T), y'(T)) - y'(T) F_{y'}(T, y(T), y'(T)) = 0.$$

Důkaz:

Zvolme $h \in C^1(\langle 0, \infty \rangle), h(0) = 0$. Pro reálná čísla ϵ, δ a y, T v nichž funkcionál V nabývá extrému definujme

$$f(\epsilon, \delta) = \int_0^{T+\delta} F(t, y(t) + \epsilon h(t), y'(t) + \epsilon h'(t)) dt,$$
$$g(\epsilon, \delta) = y(T + \delta) + \epsilon h(T + \delta) - Z.$$

Funkce f pak nabývá extrém v bodě $[0, 0]$ vzhledem k množině $M = \{[\epsilon, \delta] \in R^2; g(\epsilon, \delta) = 0\}$. Spočítejme parciální derivace funkcí f, g v počátku Opět použijeme větu o derivaci integrálu a lemma C:

$$\frac{\partial g}{\partial \delta}(0, 0) = [y'(T + \delta) + \epsilon h'(T + \delta)]_{[0,0]} = y'(T),$$
$$\frac{\partial g}{\partial \epsilon}(0, 0) = [h(T + \delta)]_{[0,0]} = h(T),$$
$$\frac{\partial f}{\partial \delta}(0, 0) = [F(T + \delta, y(T + \delta) + \epsilon h(T + \delta), y'(T + \delta) + \epsilon h'(T + \delta))]_{[0,0]} =$$
$$F(T, y(T), y'(T)),$$
$$\frac{\partial f}{\partial \epsilon}(0, 0) = [\int_0^{T+\delta} (F_y(t, y + \epsilon.h, y' + \epsilon.h')h + F_{y'}(t, y + \epsilon.h, y' + \epsilon.h')h')dt]_{[0,0]} =$$
$$\int_0^T (F_y.h + F_{y'}.h')dt.$$

Nejprve zvolme h, pro která je $h(T) = 0$ a $\delta = 0$. Pak funkce $f(\epsilon, 0)$ nabývá extrém vzhledem k přímce $[\epsilon, 0] \subset M$ v bodě $\epsilon = 0$ a tedy $\frac{\partial f}{\partial \epsilon}(0, 0) = 0$. Odtud standardně odvodíme Eulerovu rovnici.

Z věty o Lagrangeových multiplikátorech plyne, že buď je $\nabla g(0, 0)$ nulový nebo existuje Lagrangeův multiplikátor λ tak, že $\nabla f(0, 0) + \lambda \nabla g(0, 0) = 0$.

Předpokládejme, že $y'(T) \neq 0$. Pak je $\nabla g(0, 0) \neq 0$ a existuje λ takové, že

$$(3) \qquad F(T, y(T), y'(T)) = \lambda y'(T)$$
$$\int_0^T (F_y.h + F_{y'}.h')dt = \lambda h(T).$$

Na druhý výraz v integrálu ve druhé rovnici užijeme integraci per partes a dostaneme

$$(4) \qquad \int_0^T (F_y - \frac{d}{dt} F_{y'}) h dt + [F_{y'} h]_0^T = F_{y'}(T, y(T), y'(T)).h(T).$$

Tato rovnost je splněna pro všechna $h \in C^1(\langle 0, \infty\rangle), h(0) = 0, h(T) = 0$ a z lemmatu B dostáváme, že y řeší Eulerovu rovnici. Buď nyní $h(T) \neq 0$. Pak platí z rovnice (3)

$$F(T, y(T), y'(T)) = \lambda y'(T) \tag{(5)}$$

a současně

$$F_{y'}(T, y(T), y'(T)).h(T) = \lambda.h(T).$$

Protože $h(T) \neq 0$, je splněna podmínka transverzality T6.

Je-li $y'(T) = 0$ a $h(T) = 0$, je i $\nabla f(0, 0) = 0$ a dostáváme z rovnice (3) splnění podmínky transverzality a z rovnice $\frac{\partial f}{\partial \epsilon}(0, 0) = 0$ splnění Eulerovy rovnice.

Horizontal terminal line (úloha P6)

(Koncový čas daný nerovností, pevná koncová hodnota)

Dáno: $A, Z, T^* \in R, T^* > 0, F \in C^1(\langle 0, \infty\rangle \times R \times R)$.
Hledáme: $T \in R, T > 0, T \leq T^*, y \in C^1(\langle 0, T\rangle), y(0) = A, y(T) = Z$ takové, že hodnota funkcionálu

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), y'(s))ds$$

je minimální.

Věta 10.(Nutná podmínka pro extrém úlohy P6)

Nechť dvojice T, y je bodem minima úlohy P6. Pak je y řešením Eulerovy rovnice

$$(ER) \qquad F_y(t, y(t), y't) = \frac{d}{dt} F_{y'}(t, y(t), y'(t)), t \in (0, T)$$

a splňuje podmínky transverzality

$$(T7) \qquad T \leq T^*, F(T, y(T), y'(T)) - y'(T)F_{y'}(T, y(T), y'(T)) \leq 0,$$

$$(T - T^*)\left(F(T, y(T), y'(T)) - y'(T)F_{y'}(T, y(T), y'(T))\right) = 0.$$

Věta 10 je bez důkazu.

1.5. Izoperimetrické úlohy

Izoperimetrická úloha (P7)

Dáno: $A, Z, B, T \in R, T > 0$ a $F \in C^1(\langle 0, T\rangle \times R \times R)$,

$G \in C^1(\langle 0,T\rangle \times R \times R)$.

Hledáme: $y \in C^1(\langle 0,T\rangle), y(0) = A, y(T) = Z$ takové, že

$$\int_0^T G(t, y(t), y'(t))dt = B$$

a hodnota funkcionálu

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), y'(s))ds$$

je minimální (resp. maximální).

Věta 11.(Nutná podmínka pro extrém úlohy P7)
Je-li y je bodem maxima (resp minima) úlohy P7, pak je buď

$$G_y(t, y(t), y't) = \frac{d}{dt} G_{y'}(t, y(t), y'(t)), t \in (0,T),$$

nebo existuje $\lambda \in R$ tak, že

$$F_y(t, y(t), y't) - \lambda G_y(t, y(t), y't) =$$

$$\frac{d}{dt}\left(F_{y'}(t, y(t), y'(t)) - \lambda G_{y'}(t, y(t), y'(t))\right), t \in (0,T).$$

Věta 11 je bez důkazu.

1.6. Úlohy s více stavovými proměnnými

Úloha s dvěma stavovými proměnnými (P8)

Dáno: $T \in R, T > 0; A = [A_1, A_2] \in R^2, Z = [Z_1, Z_2] \in R^2$ a
$F \in C^1\left(\langle 0,T\rangle \times R^2 \times R^2\right)$.
Hledáme: $y = [y_1, y_2], y_j \in C^1(\langle 0,T\rangle)$ pro $j = 1, 2$, $y(0) = A, y(T) = Z$ takové, že hodnota funkcionálu

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), y'(s))ds$$

je minimální (resp. maximální).

Věta 12.(Nutná podmínka pro extrém úlohy P8)

Nechť y je bodem extrému úlohy P8. Pak je každá složka $y_j, j = 1, 2,$ řešením Eulerovy rovnice

$$(ER) \qquad F_{y_j}(t, y(t), y'(t)) = \frac{d}{dt} F_{y'_j}(t, y(t), y'(t)), t \in (0, T).$$

Věta 12 je bez důkazu.

1.7 Úlohy s nekonečným horizontem

Než se začneme zabývat úlohami variačního počtu na intervalech nekonečné délky (bez újmy na obecnosti na intervalu $\langle 0, \infty))$ potřebujeme objasnit, co rozumíme integrálem z reálné funkce na takovém intervalu. (Připomeňme, že definice Riemannova integrálu je vázána na interval konečné délky.) Proto se po formulaci základní úlohy P9 budeme věnovat definici integrálu, kterou můžeme v takovém kontextu použít.

Formulace základní úlohy P9
Dáno: $A \in R$ a $F \in C^1(\langle 0, \infty) \times R \times R)$.
Hledáme: $y \in C^1(\langle 0, \infty)), y(0) = A$ takové, že

$$V(y) = \int_0^\infty F(s, y(s), y'(s))ds$$

je minimální (resp. maximální).

Přípravné úvahy o konvergenci integrálu

Definice

Nechť $f : (a, b) \to R$. Řekneme, že F je primitivní funkcí k f na intervalu (a, b), jestliže pro každé $x \in (a, b)$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Definice

Nechť $f : (a, b) \to R$. Řekneme, že $\int_a^b f(t)dt$ konverguje (v Newtonově smyslu), jestliže existuje primitivní funkce F k f na (a, b) a existují vlastní limity

$$\lim_{t \to a+} F(t) = A, \lim_{t \to b-} F(t) = B.$$

Hodnotou integrálu pak rozumíme

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{t \to b-} F(t) - \lim_{t \to a+} F(t) = B - A.$$

Příklad 1
$\int_1^\infty t^\alpha dt$ konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$.

Příklad 2
$\int_1^\infty e^{-\alpha t} dt$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 0$.

Tvrzení 1 (o integrovatelné majorantě)

Nechť f, g jsou spojité na (a, b) a $|f| \leq g$. Jestliže $\int_a^b g(t)dt$ konverguje, pak i $\int_a^b f(t)dt$ konverguje. Funkci g pak nazveme integrovatelnou majorantou.

Důkaz:
1. Pro funkci f (která může měnit znaménko) definujme $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ a $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$. Obě tyto funkce jsou nezáporné, spojité na (a, b) a splňují nerovnosti $0 \leq f^+ \leq g, 0 \leq f^- \leq g$. Stačí tedy dokázat tvrzení 1 pro nezáporné funkce f^+, f^-a užít rovnosti $f = f^+ - f^-$ a linearity integrálu.
2. Předpokládejme, že f je nezáporná na (a, b). Pak je $0 \leq f \leq g$ na (a, b) a $g - f \geq 0$ na (a, b). Zvolme bod $c \in (a, b)$ a buďte F, G primitivní funkce k f, g na (a, b), pro které platí $F(c) = G(c) = 0$. Z nezápornosti funkcí $f, g, g - f$ plyne, že $F, G, G - F$ jsou neklesající funkce. Tedy existují jednostranné limity funkcí F, G v krajních bodech intervalu (a, b). Dále z monotonie $G(x) - F(x)$ plyne, že pro všechna $x \in (c, b)$ je $G(x) \geq F(x)$. Tedy i $\lim_{x\to b-} F(x) \leq \lim_{x\to b-} G(x) \in R$. Z obdobných důvodů je vlastní i $\lim_{x\to a+} F(x)$ a tedy konverguje $\int_a^b f(x)dx$.

Příklad

Nechť $\rho > 0$ a funkce $t \in \langle 0, \infty) \to f(t) = F(t, y(t), y'(t))$ je omezená. Pak $\int_0^\infty F(t, y(t), y'(t))e^{-\rho t} dt$ konverguje.

Tvrzení 2 (o typické majorantě)

Nechť $F = F(y, z)$ je funkce dvou proměnných, která je spojitá na R^2 a nechť $y \in C^1(\langle 0, \infty))$ je omezená funkce s omezenou derivací a $\rho > 0$. Pak $\int_0^\infty F(t, y(t), y'(t))e^{-\rho t} dt$ konverguje.

Důkaz:

Funkce y a y' jsou spojité a omezené na $\langle 0, \infty \rangle$, tedy existují konstanty $a, b \in R$ tak, že $|y(t)| \leq a, |y'(t)| \leq b$ pro všechna $t \in \langle 0, \infty \rangle$. Funkce F je spojitá na R^2 a tedy je omezená konstantou c na kompaktní množině $\langle -a, a \rangle \times \langle -b, b \rangle$.
Pak platí $|F(y(t), y'(t))| \leq c$ na $\langle 0, \infty \rangle$. Tvrzení 2 plyne z tvrzení 1, položíme-li $f(t) = F(y(t), y'(t))e^{-\rho t}, g(t) = ce^{-\rho t}$.

Věta 13 (derivace integrálu na intervalu nekonečné délky)
Buďte $a, b, c, d \in R^*$. Nechť f a $\partial_1 f$ jsou spojité na $(a, b) \times (c, d)$ a platí:

(i) existuje funkce $g : (c,d) \to R$ taková, že $\int_c^d g(x)dx$ konverguje a současně $|\partial_1 f(y,x)| \le g(x)$ pro všechna $y \in (a,b), x \in (c,d)$;

(ii) existuje $y_o \in (a,b)$ takové, že $\int_c^d f(y_o,x)dx$ konverguje.

Pak $F(y) = \int_c^d f(y,x)dx \in C^1((a,b))$ a platí

$$F'(y) = \int_c^d \partial_1 f(y,x)dx.$$

Věta 13 je bez důkazu.

Věta 14.(Nutná podmínka pro extrém úlohy P9)
Nechť F v formulaci úlohy P9 má tvar

$$F(t,y(t),y'(t)) = G(y(t),y'(t))e^{-\rho t},$$

kde $\rho > 0$ a $G \in C^1(R^2)$. Je-li y je bodem maxima (resp. minima) úlohy P9 a y, y' jsou omezené na $\langle 0,\infty)$, pak platí

$$F_y(t,y(t),y't) = \frac{d}{dt}(F_{y'}(t,y(t),y'(t)), t \in (0,\infty).$$

Důkaz:

Položme $X = \{h \in C^1(\langle 0,\infty)); h, h'$jsou omezené na$\langle 0,\infty)\}$. Díky předpokladům na F, G, y je funkcionál $H : h \to V(y+h)$ definován na X a nabývá extrém v počátku. Pro $h \in X$ platí

$$\delta H(0,h) = \frac{d}{ds}(\int_0^\infty G(y(t)+sh(t), y'(t)+sh'(t))e^{-\rho t}dt)_{s=0}.$$

K výpočtu derivace užijeme větu 13. Zvolíme

$(a,b) = (-1,1)$,

$(c,d) = (0,\infty)$,

$f(s,t) = G(y(t)+sh(t), y'(t)+sh'(t))e^{-\rho t}$,

$T(s,t) = G_y(y(t)+sh(t), y'(t)+sh'(t))h(t) + G_{y'}(y(t)+sh(t), y'(t)+sh'(t))h'(t)$,

$\partial_1 f(s,t) = T(s,t)e^{-\rho t}$.

Pak platí

(1) obor hodnot zobrazení $[s,t] \to [y(t)+sh(t), y'(t)+sh'(t)], s \in (-1,1), t \in (0,\infty)$ je omezený,

(2) obor hodnot funkce T je omezený.

Tedy existuje majoranta k funkcím $f(s,t), \partial_1 f(s,t)$ ve tvaru $g(t) = Ce^{-\rho t}$. Dostáváme

$$\delta H(0,h) = \int_0^\infty (G_y h + G_{y'}h')e^{-\rho t}dt = \int_0^\infty (F_y h + F_{y'}h')dt = 0$$

pro všechna $h \in X$.

Zvolme $T, 0 < T < \infty$ a funkci $h; h(t) = 0$ pro všechna $t > T$. Pak je splněna Eulerova rovnice na $\langle 0, T\rangle$ a tedy i na $\langle 0, \infty)$.

Izoperimetrická úloha s nekonečným horizontem

Formulace základní úlohy P10

Dáno: $A \in R, F \in C^1(\langle 0, \infty) \times R \times R)$ a $G \in C^1(\langle 0, \infty) \times R \times R), B \in R$.
Hledáme: $y \in C^1(\langle 0, \infty)), y(0) = A$ takové, že

$$\int_0^\infty G(t, y(t), y'(t))dt = B$$

a funkcionál

$$V(y) = \int_0^\infty F(s, y(s), y'(s))ds$$

je minimální (resp. maximální).

Věta 15.(Nutná podmínka pro extrém úlohy P10)

Nechť F a G ve formulaci úlohy P10 mají tvar

$$F(t, y(t), y'(t)) = \tilde{F}(y(t), y'(t))e^{-\rho_1 t},$$

kde $\tilde{F} \in C^1(R \times R), \rho_1 > 0$,

$$G(t, y(t), y'(t)) = \tilde{G}(y(t), y'(t))e^{-\rho_2 t},$$

kde $\tilde{G} \in C^1(R \times R), \rho_2 > 0$.

Je-li y je bodem maxima (resp. minima) úlohy P10 a y, y' jsou omezené na $\langle 0, \infty)$, pak platí buď

$$G_y(t, y(t), y'(t)) = \frac{d}{dt} G_{y'}(t, y(t), y'(t)), t \in \langle 0, \infty)$$

nebo existuje $\lambda \in R$ tak, že

$$F_y(t, y(t), y'(t)) - \lambda G_y(t, y(t), y'(t)) =$$
$$\frac{d}{dt}\left(F_{y'}(t, y(t), y'(t)) - \lambda G_{y'}(t, y(t), y'(t))\right), t \in \langle 0, \infty).$$

Věta 15 je bez důkazu.

1.8 Globální extrémy

Zopakujme pojem konvexní množiny:

Definice (Konvexní množina)

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Řekneme, že M je konvexní, jestliže pro každé dva body $x, y \in M$ a pro každé $t \in \langle 0,1\rangle$ je i $z = tx + (1-t)y \in M$.

Definice (Konvexní a konkávní funkcionál)

Nechť X je vektorový prostor, $M \subset X$ je konvexní a $V : M \to R$ je funkcionál na M. Řekneme, že V je konvexní na M (resp. konkávní na M), pokud platí

$$\forall \;\; x, y, \in M,\;\; \forall t \in \langle 0,1\rangle : V(tx + (1-t)y) \le tV(x) + (1-t)V(y)$$

(resp.

$$\forall \;\; x, y, \in M,\;\; \forall t \in \langle 0,1\rangle : V(tx + (1-t)y) \ge tV(x) + (1-t)V(y)).$$

Poznámka

Funkcionál $V : X \to R$ je konvexní na X, právě když je konvexní na každé přímce v X, tj. když $\forall x \in X, \forall k \in X$ je $t \to V(x + tk)$ konvexní na R. Analogické tvrzení platí pro konkávní funkcionály a pro funkcionály definované na množině $M \subset X$.

Věta 16.(Postačující podmínky pro minimum konvexního funkcionálu)

Nechť $M \subset X$ je konvexní a $V : M \to R$ je konvexní. Jestliže $\delta_+ V(x, h - x) \ge 0$ pro každé $h \in M$, pak V nabývá v bodě x minima vzhledem k M.

Důkaz:

Větu dokážeme sporem: předpokládejme, že existuje $y \in M, y \ne x$ tak, že $V(y) < V(x)$. Počítejme

$$\delta_+ V(x, y - x) = lim_{t\to 0+} \frac{V(x + t(y - x)) - V(x)}{t} \le$$
$$lim_{t\to 0+} \frac{(1-t)V(x) + tV(y) - V(x)}{t} = lim_{t\to 0+}(V(y) - V(x)) < 0.$$

Nerovnost je však ve sporu s předpokladem o nezápornosti derivací ve libovolném směru.

Věta 17.(Konvexita funkcionálu a konvexita integrandu)

Buď M konvexní podmnožina prostoru $C^1(\langle 0,T\rangle)$. Nechť $F \in C^1(\langle 0,T\rangle \times R \times R)$ splňuje následující podmínku:

Pro každé $s \in \langle 0,T\rangle$ je funkce $[y,z] \in R^2 \to F(s,y,z)$ konvexní.

Pak je funkcionál $V : M \to R$ definovaný předpisem

$$V : y \to \int_0^T F(s,y(s),y'(s))ds$$

konvexní na množině M.

Důkaz:

Ověříme konvexitu V z definice: Buď $t \in (0,1), y, z \in M$

$$V(ty+(1-t)z) = \int_0^T F(s,ty(s)+(1-t)z(s),ty'(s)+(1-t)z'(s))ds \leq$$
$$\int_0^T (tF(s,y(s),y'(s)) + (1-t)F(s,z(s),z'(s)))\,ds = tV(y)+(1-t)V(z).$$

Označení

Nechť $F \in C^2(R^2)$. Označíme

$$\delta_1 H(x,z) = \frac{\partial H}{\partial x}(x,z), \delta_2 H(x,z) = \frac{\partial H}{\partial z}(x,z)$$

$$\delta_{11} H(x,z) = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,z), \delta_{12} H(x,z) = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z}(x,z)$$
$$\delta_{21} H(x,z) = \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial x}(x,z), \delta_{22} H(x,z) = \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}(x,z).$$

Věta 18.Konvexita a definitnost matice druhých derivací

Nechť $H \in C^2(R^2)$. Pokud je matice

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \delta_{11}H & \delta_{12}H \\ \delta_{21}H & \delta_{22}H \end{pmatrix}$$

pozitivně semidefinitní na R^2, pak je H konvexní na R^2.

Důkaz:

Zvolme $x \in R^2, h \in R^2$ a definujme $G : R \to R$ takto:$g(t) = H(x+th)$. Pak je

$$\begin{aligned} g'(t) =& \delta_1 H(x+th)h_1 + \delta_2 H(x+th)h_2, \\ g''(t) =& \delta_{11} H(x+th)h_1^2 + \delta_{12} H(x+th)h_1h_2 + \delta_{21} H(x+th)h_2h_1 + \\ & \delta_{22} H(x+th)h_2^2. \end{aligned}$$

Je-li matice druhých derivací funkce H pozitivně semidefinitní, je g'' nezáporná na R a funkce g je konvexní na R. Podle poznámky je pak konvexní i H.

Poznámky

1. Matice $\mathcal{H}$ se obvykle nazývá Hessova matice nebo Hessián funkce H.

2. Matice $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ je negativně semidefinitní na R^2 právě tehdy, když $a \leq 0, c \leq 0, b^2 - ac \leq 0$ a pozitivně semidefinitní na R^2 právě tehdy, když $a \geq 0, d \geq 0, b^2 - ac \leq 0$.

Věta 19.(Předpoklady, za nichž je nutná podmínka také postačující)

Nechť $F \in C^2(\langle 0,T\rangle \times R \times R)$ v (P1) splňuje předpoklady věty 17. Je-li $y \in C^1(\langle 0,T\rangle$ řešením Eulerovy rovnice (ER) pak funkcionál V nabývá v y minima.

Rozmyslete si obdobná tvrzení v dalších úlohách.

1.9 Lokální extrémy

Definice(Normovaný lineární prostor)

Normovaný lineární prostor je dvojice $(X, ||.||)$, kde X je vektorový prostor nad R a $||.||$ je norma na prostoru X, tj. zobrazení definované na X s hodnotami v $\langle 0, \infty)$ splňující

$$\forall x \in X : ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$\forall x \in X, \forall \alpha \in R : ||\alpha x|| = |\alpha| ||x||,$$

$$\forall x, y \in X : ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

Definice(Ostré a neostré lokální extrémy)

Nechť $(X, ||.||)$ je normovaný lineární prostor, $f : X \to R$ a $x_o \in X$. Řekneme, že f má v bodě $x_o \in X$

lokální maximum*, jestliže existuje $r > 0$ takové, že*

$$\forall x \in X, ||x - x_o|| < r : f(x) \leq f(x_o);$$

ostré lokální maximum*, jestliže existuje $r > 0$ takové, že*

$$\forall x \in X, 0 < ||x - x_o|| < r : f(x) < f(x_o);$$

lokální minimum*, jestliže existuje $r > 0$ takové, že*

$$\forall x \in X, ||x - x_o|| < r : f(x) \geq f(x_o);$$

ostré lokální minimum, *jestliže existuje* $r > 0$ *takové, že*

$$\forall x \in X, 0 < ||x - x_o|| < r : f(x) > f(x_o).$$

Definice (Norma v prostoru C^1)

V prostoru $X = C^1(\langle 0, T\rangle)$ *definujeme normu takto: pro* $y \in C^1(\langle 0, T\rangle)$ *je*

$$||y|| = sup\{|y(t)| + |y'(t)|; t \in \langle 0, T\rangle)\}.$$

Věta 20.(Postačující podmínka pro lokální extrém)

Nechť y řeší Eulerovu rovnici v úloze P1. Jestliže je matice

$$\begin{pmatrix} F_{yy}(t, y(t), y'(t)) & F_{yy'}(t, y(t), y'(t)) \\ F_{y'y}(t, y(t), y'(t)) & F_{y'y'}(t, y(t), y'(t)) \end{pmatrix}$$

pozitivně definitní pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$*, pak je* y *bodem ostrého lokálního minima.*

2. Teorie optimálního řízení

2.1. Základní úloha

Definice

Řekneme, že funkce g *je na intervalu* $\langle 0, T\rangle$ *po částech spojitá, jestliže existuje dělení* $0 = t_0 < t_1, ..., t_n = T$ *takové, že* g *je spojitá na* (t_{i-1}, t_i) *pro všechna* $i = 1, ..., n$ *a v krajních bodech existují vlastní limity funkce* g*.*

Definice

Řekneme, že funkce g *je na intervalu* $\langle 0, T\rangle$ *po částech diferencovatelná, jestliže existuje dělení* $0 = t_0 < t_1, ..., t_n = T$ *takové, že derivace* g' *je spojitá na* (t_{i-1}, t_i) *pro všechna* $i = 1, ..., n$ *a v krajních bodech existují vlastní limity funkce* g'*.*

Formulace úlohy P11 (volná koncová hodnota)

Dáno: $T \in R, T > 0, A \in R$ a $f, F \in C(\langle 0, T\rangle \times R \times R)$, $\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_1 F, \partial_2 F \in C(\langle 0, T\rangle \times R \times R)$ a $U \subset R$ uzavřený interval.

Hledáme:

y spojitou a po částech diferencovatelnou na $\langle 0, T\rangle, y(0) = A$,

$u : \langle 0, T\rangle \to U$ po částech spojitou na $\langle 0, T\rangle$ takové, že

$$y'(t) = f(t, y(t), u(t))$$

na $\langle 0, T\rangle$ s výjimkou konečné množiny a hodnota funkcionálu

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), u(s))ds$$

je maximální.

Poznámky

1. Předpoklad "$U \subset R$ je uzavřený interval" znamená, že U je jeden z intervalů $R, (-\infty, a\rangle, \langle b, \infty), \langle c, d\rangle$, kde $a, b, c, d \in R, c < d$.

2. Funkci u nazveme řídící funkcí, funkci y stavovou funkcí a rovnici $y' = f(t, y(t), y'(t))$ stavovou rovnicí.

Definice Hamiltoniánu *Funkci*

$$H(y, u, \lambda) = F(t, y, u) + \lambda f(t, y, u)$$

nazveme Hamiltoniánem úlohy P11.

Věta 21.(Nutná podmínka pro extrém úlohy P11, Pontryaginův princip maxima)

Buď y^*, u^* bodem maxima úlohy P11. Pak existuje funkce $\lambda : \langle 0, T\rangle \to R$ taková, že pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$ až na konečnou množinu platí:

(I) (maximalita u^*)

$$H(t, y^*(t), u^*(t), \lambda(t)) \geq H(t, y^*(t), u, \lambda(t)), \quad \forall \quad u(t) \in U$$

(II) (stavová rovnice)

$$(y^*)'(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, y^*(t), u^*(t), \lambda(t)),$$

(III) (pohybová rovnice pro λ)

$$\lambda'(t) = -\frac{\partial H}{\partial y}(t, y^*(t), u^*(t), \lambda(t)),$$

(IV) (podmínka transverzality)

$$\lambda(T) = 0.$$

Náznak důkazu

Předpokládejme pro jednoduchost, že $U = R$, všechny uvažované funkce jsou spojitě diferencovatelné na svých definičních oborech a funkce f je lineární v $[y,u]$.

1. krok:

Označme M množinu dvojic $[y,u]$ takových, že $y(0) = A, y'(t) = f(t, y(t), u(t))$ na $\langle 0, T\rangle$ a předpokládejme, že $[y^*, u^*]$ je bodem maxima funkcionálu V na množině M, tj. pro každé $[y,u] \in M$ je

$$V(y,u) \le V(y^*, u^*)$$

.

Pro každou reálnou funkci λ, $y \in M$ a $t \in \langle 0, T\rangle$ je výraz $\lambda(t)(f(t, y(t), u(t)) - y'(t))$ nulový. Můžeme tedy psát, že pro $y \in M$ je

$$V(y,u) = \int_0^T F(t, y(t), u(t))dt =$$

$$\int_0^T F(t, y(t), u(t)) + \lambda(t)\left(f(t, y(t), u(t)) - y'(t)\right) dt.$$

2. krok:

Pro $a \in R$ zvolme $u^a(t) = u^*(t) + ah(t)$ a označme $y^a(t)$ řešení stavové rovnice

$$(y^a)' = f(t, y^a, u^a),$$

pro které je $y^a(0) = A$. (Pak je $[y^a, u^a] \in M$ a tedy $\lambda(f(t, y^a, u^a) - (y^a)') = 0$.)

Označme

$$J(a) = V(y^a, u^a) = \int_0^T F(t, y^a(t), u^a(t))dt =$$

$$\int_0^T F(t, y^a(t), u^a(t)) + \lambda(t)\left(f(t, y^a(t), u^a(t)) - (y^a)'(t)\right) dt.$$

Integrujeme-li per partes ve členu s derivací $(y^a)'$ v integrálu $J(a)$, dostaneme

$$J(a) =$$

$$\int_0^T (F(t, y^a(t), u^a(t)) + \lambda(t) f(t, y^a(t), u^a(t))) + \lambda'(t) y^a(t) dt$$

$$-\lambda(T) y^a(T) + \lambda(0) y^a(0).$$

Funkce $J(a)$ nabývá maxima v bodě $a = 0$ a je diferencovatelná, tedy je $J'(0) = 0$. Spočítejme J' (pro jednoduchost vynecháme argumenty jednotlivých funkcí a použijeme toho, že poslední člen je konstantní).

$$J'(a) = \int_0^T (F_y.(y^a)' + F_u.h) + \lambda.(f_y.(y^a)' + f_u.h)) +$$

$$\lambda'(t) y^a(t) - \lambda(T)(y^a)'(T) =$$

$$\int_0^T (F_y + \lambda f_y + \lambda')(y^a)' + (F_u + \lambda f_u)hdt - \lambda(T)(y^a)'(T).$$

3. krok
Zvolme za λ řešení rovnice

$$\lambda' = -(F_y + \lambda f_y) = -\frac{\partial H}{\partial y},$$

splňující podmínku $\lambda(T) = 0$. Jedná se o lineární rovnici prvního řádu se spojitými koeficienty a pravou stranou, tedy řešení vždy existuje a je to spojitě diferencovatelná funkce na $\langle 0, T\rangle$. Touto volbou se anuluje první a poslední člen ve výrazu pro $J'(0)$. Funkce λ splňuje pohybovou rovnici a podmínku transverzality.

4.krok
V rovnici $J'(0) = 0$ zvolme $h = F_u + \lambda f_u$. Dostaneme

$$\int_0^T (F_u + \lambda f_u)^2 dt = 0.$$

Integrand je spojitá nezáporná funkce a z lemmatu A plyne $F_u + \lambda f_u = 0$. Tím je důkaz v tomto zjednodušeném případě dokončen.

2.2 Další koncové podmínky

Formulace úlohy P12 (pevná koncová hodnota i koncový čas)

Dáno: $T \in R, T > 0, A \in R, Z \in R$ a $f, F \in C(\langle 0, T\rangle \times R \times R)$,
$\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_1 F, \partial_2 F \in C(\langle 0, T\rangle \times R \times R)$ a $U \subset R$ uzavřený interval.

Hledáme:

y spojitou a po částech diferencovatelnou na $\langle 0, T\rangle, y(0) = A, y(T) = Z$,

$u : \langle 0, T\rangle \to U$ po částech spojitou na $\langle 0, T\rangle$ takové, že

$$y'(t) = f(t, y(t), u(t))$$

na $\langle 0, T\rangle$ s výjimkou konečné množiny a hodnota funkcionálu

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), u(s))ds$$

je maximální.

Věta 22 (Nutná podmínka pro extrém úlohy P12) *Buď y^*, u^* bodem maxima úlohy P12, pak existuje funkce $\lambda : \langle 0, T\rangle \to R$ taková, že pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$ až na konečnou množinu jsou splněny podmínky (I), (II), (III) z věty18 a podmínka transverzality (IV) je nahrazena podmínkou $y(T) = Z$.*

Důkaz:

Prohlédnete-li důkaz věty P11, zjistíte, že stačí uvědomit si, že tentokrát je díky podmínce $y(T) = Z$ člen $\lambda(T)y^a(T)$ konstantní funkcí proměnné a.

Formulace úlohy P13 (Horizontal terminal line - pevná koncová hodnota, volný koncový čas)

Dáno: $A \in R, Z \in R$ a $f, F \in C(\langle 0, T\rangle \times R \times R)$,
$\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_1 F, \partial_2 F \in C(\langle 0, T\rangle \times R \times R)$ a $U \subset R$ uzavřený interval.

Hledáme:
$T \in R, T > 0$

y spojitou a po částech diferencovatelnou na $\langle 0, T\rangle, y(0) = A, y(T) = Z$,

$u : \langle 0, T\rangle \to U$ po částech spojitou na $\langle 0, T\rangle$ takové, že

$$y'(t) = f(t, y(t), u(t))$$

na $\langle 0, T\rangle$ s výjimkou konečné množiny a hodnota funkcionálu

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), u(s))ds$$

je maximální.

Věta 23 (Nutná podmínka pro extrém úlohy P13)

Buď y^*, u^* bodem maxima úlohy P11, pak existuje funkce $\lambda : \langle 0, T\rangle \to R$ taková, že pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$ až na konečnou množinu jsou splněny podmínky (I), (II), (III) z věty18 a podmínka transverzality (IV) je nahrazena podmínkou $H(T, y(T), u(T), \lambda(T)) = 0$.
Věta 23 je bez důkazu.

Formulace úlohy P14 (Truncated horizontal terminal line)

(Koncová hodnota pevná, koncový čas s nerovností)

Dáno: $T_{max} \in R, T_{max} > 0, A \in R, Z \in R$ a $f, F \in C(\langle 0, T\rangle \times R \times R)$, $\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_1 F, \partial_2 F \in C(\langle 0, T\rangle \times R \times R)$ a $U \subset R$ uzavřený interval.

Hledáme: $T, 0 < T \leq T_{max}$
y spojitou a po částech diferencovatelnou na $\langle 0, T\rangle, y(0) = A, y(T) = Z$,

$u : \langle 0, T\rangle \to U$ po částech spojitou na $\langle 0, T\rangle$ takové, že

$$y'(t) = f(t, y(t), u(t))$$

na $\langle 0, T\rangle$ s výjimkou konečné množiny a hodnota funkcionálu

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), u(s))ds$$

je maximální.

Věta 24. Nutná podmínka pro extrém úlohy P14 *Buď T^*, y^*, u^* bodem maxima úlohy P14. Pak existuje funkce $\lambda : \langle 0, T\rangle \to R$ taková, že pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$ až na konečnou množinu jsou splněny podmínky (I), (II), (III) z věty 18 a podmínka transverzality (IV) je nahrazena podmínkou*

$$H(T^*, y(T^*), u(T^*), \lambda(T^*)) \geq 0, T^* \leq T_{max}$$

a

$$H(T^*, y(T^*), u(T^*), \lambda(T^*))(T_{max} - T^*) = 0.$$

Věta 24 je bez důkazu.

Formulace úlohy P15 (Truncated vertical terminal line)

(Koncový čas pevný, koncová hodnota s nerovností)

Dáno: $T \in R, T > 0, A \in R, Z_{min} \in R,\ f, F \in C\left(\langle 0, T\rangle \times R \times R\right)$,
$\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_1 F, \partial_2 F \in C\left(\langle 0, T\rangle \times R \times R\right)$ a $U \subset R$ uzavřený interval.

Hledáme: $Z \geq Z_{min}$
y spojitou a po částech diferencovatelnou na $\langle 0, T\rangle, y(0) = A, y(T) \geq Z_{min}$,
$u : \langle 0, T\rangle \to U$ po částech spojitou na $\langle 0, T\rangle$ takové, že

$$y'(t) = f(t, y(t), u(t))$$

na $\langle 0, T\rangle$ s výjimkou konečné množiny
a hodnota funkcionálu

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), u(s))ds$$

je maximální.

Věta 25. Nutná podmínka pro extrém úlohy P15 *Buď Z^*, y^*, u^* bodem maxima úlohy P15 a $Z^* = y^*(T)$. Pak existuje funkce $\lambda : \langle 0, T\rangle \to R$ taková, že pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$ až na konečnou množinu jsou splněny podmínky (I), (II), (III) z věty 18 a podmínka transverzality (IV) je nahrazena podmínkou*

$$\lambda(T) \geq 0, Z^* \geq Z_{min}$$

a

$$\lambda(T))(Z^* - Z_{min}) = 0.$$

2.3 Problémy s více stavovými nebo řídícími proměnnými

Formulace úlohy P16

Dáno: $n, m \in N, T \in R, T > 0$, $F \in C^2(\langle 0, T\rangle \times R^n \times R^m)$, $f_i \in C^2(\langle 0, T\rangle \times R^n \times R^m)$ pro $i = 1, ..., n$,
$y_o = [y_{o1}, ..., y_{on}] \in R^n$, $U_1, , , U_m$ jsou uzavřené intervaly v R.

Hledáme: $y = [y_1, ..., y_n]$ spojité a po částech diferencovatelné na $\langle 0, T\rangle$ a $u = [u_1, ..., u_m]$ po částech spojité na $\langle 0, T\rangle$, splňující

$$y_1' = f_1(t, y_1, ..., y_n, u_1, ..., u_m), y_1(0) = y_{o1}; ...,$$

$$y_n' = f_n(t, y_1, ..., y_n, u_1, ..., u_m), y_n(0) = y_{0n}$$

a
funkce $u_1(t) \in U_1, ...u_m(t) \in U_m$ na $\langle 0, T\rangle$ s výjimkou konečné množiny takové, že

$$V(y, u) = \int_0^T F(t, y_1, , , y_n, u_1, ..., u_m)dt$$

je maximální.

Značení

Označíme

$$y = (y_1, ..., y_n), u = (u_1, ..., u_m), f = (f_1, ..., f_n), y_o = (y_{01}, ..., y_{0n})$$

$$U = U_1 \times ... \times U_m.$$

a zapíšeme úlohu P16 takto

$$u(t) \in U, y' = f(t, y, u), y(0) = y_o,$$

a $V(y, u)$ je maximální.
Dále označíme

$$H = F(t, y, u) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(t, y, u).$$

Věta 26 (princip maxima pro P16)

Buď y^*, u^* bodem maxima v úloze P16. Pak existuje funkce $\lambda : \langle 0, T\rangle \to R^n$ taková, že pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$ až na konečnou množinu platí:
(I) pro každé $u \in U$ platí

$$H(t, y^*(t), u(t), \lambda(t)) \leq H(t, y^*(t), u^*(t), \lambda(t)),$$

(II) (stavová rovnice)

$$y^{*\prime}_j(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_j}(t, y^*(t), u^*(t), \lambda(t)),$$

(III) (pohybová rovnice pro λ)

$$\lambda_j'(t) = -\frac{\partial H}{\partial y_j}(t, y^*(t), u^*(t), \lambda(t)),$$

(IV) (podmínka transverzality)

$$\lambda_j(T) = 0.$$

pro každé $j = 1, ..., n$.

Věta 26 je bez důkazu.

2.4 Izoperimetrická úloha v teorii optimálního řízení

Formulace úlohy P17

Dáno: $T \in R, T > 0, y_o \in R, B \in R, F, f, G \in C^2(\langle 0, T\rangle \times R \times R)$

Hledáme: y po částech diferencovatelné, u po částech spojité tak, že $[y, u]$ je maximem funkcionálu

$$V(y, u) = \int_0^T F(t, y(t), u(t))dt$$

a platí $y(0) = y_o, y(T)$ je volné, $y' = f(t, y(t), u(t))$ a $\int_0^T G(t, y(t), u(t))dt = B$.

Důkaz provedeme převedením úlohy P17 na problém P16.

Definujme novou stavovou proměnnou Γ vztahem

$$\Gamma'(t) = G(t, y(t), u(t)), \Gamma(0) = 0.$$

Pak je

$$\Gamma(t) = \int_0^t G(s, y(s), u(s))ds, \Gamma(T) = B.$$

Použijeme nutnou podmínku pro úlohu se dvěma stavovými proměnnými y, Γ a jednou řídící proměnnou u z Věty 23. Definujeme

$$H(t) = F + \lambda_1 f + \lambda_2 \Gamma$$

Věta 27(princip maxima pro P17)

Buď y^*, u^* bodem maxima v úloze P17. Pak existuje funkce $\lambda : \langle 0, T\rangle \to R^2$ taková, že pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$ až na konečnou množinu platí:

(I) pro každé $u \in U$ platí

$$H(t, y^*(t), \Gamma^*(t), u(t), \lambda(t)) \leq H(t, y^*(t), \Gamma^*(t), u^*(t), \lambda(t)),$$

(II) (stavové rovnice)

$$y^{*\prime}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1}(t, y^*(t), \Gamma^*(t), u^*(t), \lambda(t)),$$

$$\Gamma^{*\prime}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_2}(t, y^*(t), \Gamma^*(t), u^*(t), \lambda(t)),$$

(III) (pohybová rovnice pro λ)

$$\lambda_1'(t) = -\frac{\partial H}{\partial y}(t, y^*(t), \Gamma^*(t,)u^*(t), \lambda(t)),$$

$$\lambda_2'(t) = -\frac{\partial H}{\partial \Gamma}(t, y^*(t), \Gamma^*(t,)u^*(t), \lambda(t)),$$

(IV) (podmínky transverzality)

$$\lambda_1(T) = 0, \Gamma^*(T) = B.$$

2.6 Postačující podmínky pro extrém v optimálním řízení

Věta 28 (Postačující podmínka pro extrém v úloze P11) *Předpokládejme, že F, f jsou diferencovatelné a konkávní funkce proměnných y, u a platí buď*

1. f je lineární v y a v u

nebo

2. λ je nezáporná na $\langle 0, T\rangle$.

Jestliže y^*, u^*, λ splňují Pontryaginův princip maxima, pak funkcionál V nabývá v bodě y^*, u^* maxima ve třídě funkcí z úlohy P11.

Nejprve dokážeme pomocné lemma:

Lemma : *Buď g diferencovatelná a konkávní funkce na R^2. Pak pro každé $[x, z], [x^*, z^*] \in R^2$ platí*

$$g(x, z) - g(x^*, z^*) \le g_x(x^*, z^*)(x - x^*) + g_z(x^*, z^*)(z - z^*).$$

Důkaz lemmatu

Z definice konkávní funkce je pro každé $t \in \langle 0, 1\rangle$

$$g(tx + (1-t)x^*, tz + (1-t)z^*) \ge tg(x, z) + (1-t)g(x^*, z^*).$$

Odtud

$$g(x^* + t(x - x^*), z^* + t(z - z^*)) - g(x^*, z^*) \ge t\left(g(x, z) - g(x^*, z^*)\right).$$

Po vydělení nerovnosti kladným t dostáváme limitním přechodem pro $t \to 0$ tvrzení lemmatu.

Důkaz věty 28

Větu dokážeme za zjednodušující podmínky, kdy v kroku I principu maxima je splněna podmínka

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, y^*, u^*, \lambda) = 0,$$

tj.

$$F_u(t, y^*, u^*) + \lambda f_u(t, y^*, u^*) = 0$$

a

$$F_u(t, y^*, u^*) = -\lambda f_u(t, y^*, u^*). \quad (1)$$

. Z pohybové rovnice pro λ je

$$(\lambda)'(t) = -\frac{\partial H}{\partial y}(t, y^*, u^*, \lambda) = -\left[F_y(t, y^*, u^*) + \lambda f_y(t, y^*, u^*)\right]$$

a

$$F_y(t, y^*, u^*) = -\lambda f_y(t, y^*, u^*) - (\lambda)'(t). \quad (2)$$

Odhadněme z lemmatu rozdíl

$$V - V^* =$$
$$\int_0^T F(t, y, u) - F(t, y^*, u^*) dt \leq \int_0^T F_y(t, y^*, u^*)(y - y^*) + F_u(t, y^*, u^*)(u - u^*) dt.$$

Z rovnic (1), (2) plyne

$$V - V^* \leq$$
$$\int_0^T -(\lambda)'(t)(y - y^*) - \lambda(t) f_y(t, y^*, u^*)(y - y^*) + [-\lambda(t) f_u(t, y^*, u^*)](u - u^*) dt.$$

V prvním členu užijeme integrace per partes a dostaneme

$$V - V^* \leq \int_0^T \lambda(t) \left[(y' - (y^*)' - f_y(t, y^*, u^*)(y - y^*)) - f_u(t, y^*, u^*)](u - u^*)\right] dt +$$
$$\lambda(0)(y(0) - y^*(0)) - \lambda(T)(y(T) - y^*(T)).$$

Počáteční podmínka funkcí y i y^* je shodná ($y(0) = y^*(0) = A$), tedy první člen na druhém řádku je nulový. V úloze P11 je $\lambda(T) = 0$ a v P12 je $y(T) = y^*(T) = Z$, tedy i druhý člen na druhém řádku se anuluje. Užijeme-li v prvním řádku stavové rovnice, je

$$V - V^* \leq \int_0^T \lambda(t) \times$$
$$\left[f(t, u, y) - f(t, y^*, u^*) - f_y(t, y^*, u^*)(y - y^*)) - f_u(t, y^*, u^*)](u - u^*)\right] dt.$$

Je-li funkce f lineární, je závorka v integrálu nulová. Je-li f nelineární a konkávní, je podle lemmatu závorka menší nebo rovná nule a tvrzení věty plyne z nezápornosti λ.