Matematika V.

Dynamická optimalizace

Obsah

Kapitola 1. Variační počet

Kapitola 2. Optimální řízení

Doporučená literatura k přednášce

M. I. Kamien, N. L. Schwartz: Dynamic Optimization,Part I. Sections 1.,2.,3.,4.(jen Cases 1,2), 8.,9. 12, 15; Part II. Sctions 1-3, 5,6,10; Appendix A, Sections 3,4.

A.C.Chiang: Dynamic Optimization, Part 1., Part 2. 2:sections 2.1, 2.2, 2.3, 2.5,3. 3: 3.1,3.2,3.3, Part 3.7:7.1-7.4, 8: 8.3 první část.

M.Halická, P. Brunovský, P. Jurča: Optimálné riadenie II, EPOS Bratislava 2012-13

Kapitola 1. Variační počet

1.1. Derivování funkcionálu na vektorových prostorech

Definice (Jednostranná derivace ve směru)
Nechť X je vektorový prostor, $F : X \to R, a \in X, h \in X$.
Derivací funkcionálu f v bod? a zprava ve směru h rozumíme

$$\delta_+ F(a, h) = \lim_{t \to 0+} \frac{F(a + th) - F(a)}{t},$$

pokud tato limita existuje a je vlastní.

Poznámka Obdobně definujeme derivaci zleva ve směru h a značíme ji $\delta_- F(a, h)$. Obvykle se v definici vyskytuje oboustranná derivace a oboustranná limita. Slovo "oboustranná"' pak vypouštíme a derivaci značíme $\delta F(a, h)$.

Definice (Maximum a minimum reálného funkcionálu)
Nechť X je reálný vektorový prostor, $M \subset X, a \in M$ a $F : M \rightarrow R$ je reálný funkcionál definovaný na množině M. Řekneme, že a je bodem minima (resp. bodem maxima) funkcionálu F na množině M, jestliže pro každé $x \in M$ platí $F(x) \geq F(a)$ (resp. $F(x) \leq F(a)$).

Věta 1.(Fermatova věta)
Nechť X je reálný vektorový prostor, $F : X \rightarrow R$ a $a \in X$. Jestliže funkcionál F má v bodě a extrém (tj. maximum nebo minimum), pak pro každé $h \in X$ platí, že derivace $\delta F(a, h)$ neexistuje nebo je rovna nule.

Obecněji platí

Věta 2.

Nechť X je reálný vektorový prostor, $F : M \subset X \to R$ a úsečka s krajními body $a, a+h$ leží v M. Jestliže funkcionál F nabývá v bodě a minima vzhledem k množině M pak buď derivace $\delta_+ F(a,h)$ neexistuje nebo je nezáporná.

1.2. Derivování integrálu

Definice(Stejnoměrně spojitá funkce)
Nechť $M \subset R^n$. Řekneme, že funkce $f : M \to R$ je stejnoměrně spojitá na M, jestliže platí

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall x, y \in M, ||x - y|| < \delta : |f(x) - f(y)| < \epsilon. \tag{1}$$

Věta 3.(Spojitá funkce na kompaktu)
Nechť $K \subset R^n$ je kompaktní a $f : K \to R$ je spojitá na K. Potom f je stejnoměrně spojitá na K.

Věta 4.(Derivace integrálu)
Nechť $f:(a,b)\times(c,d)\to R$ je spojitá a $\partial_1 f=\frac{\partial f}{\partial y}(=$ její parciální derivace podle první proměnné) je také spojitá na $(a,b)\times(c,d)$. Nechť $\varphi:(a,b)\to(c,d)$ má v každém bodě intervalu (a,b) vlastní derivaci. Nechť $x_o\in(c,d)$. Položme pro $y\in(a,b)$

$$K(y)=\int_{x_o}^{\varphi(y)} f(y,x)dx. \tag{2}$$

Pak má funkce K v každém bodě intervalu (a,b) vlastní derivaci a platí

$$K'(y)=f(y,\varphi(y))\varphi'(y)+\int_{x_o}^{\varphi(y)}\partial_1 f(y,x)dx,\quad y\in(a,b). \tag{3}$$

1.3. Formulace základní úlohy (P1) variačního počtu

Dáno: $T \in R, T > 0, A, Z \in R, F \in C^1\left(\langle 0, T\rangle \times R \times R\right)$.

Hledáme: $y \in C^1(\langle 0, T\rangle), y(0) = A, y(T) = Z$ takové, že hodnota funkcionálu

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), y'(s))ds$$

je minimální (resp. maximální).

Označení

Pro funkci $F \in C^2(\langle 0, T\rangle \times R \times R)$ proměnných t, x, z, kde $t \in \langle 0, T\rangle, x \in R, z \in R$ značíme

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x, z) = \partial_1 F(t, x, z),$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x, z) = \partial_2 F(t, x, z),$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(t, x, z) = \partial_3 F(t, x, z).$$

Jedná-li se o složenou funkci $F(t, y(t), y'(t))$ značíme

$$\partial_1 F(t, y(t), y'(t)) = F_t(t, y(t), y'(t)),$$

$$\partial_2 F(t, y(t), y'(t)) = F_y(t, y(t), y'(t)),$$

$$\partial_3 F(t, y(t), y'(t)) = F_{y'}(t, y(t), y'(t)).$$

Věta 5.(Nutná podmínka pro extrém úlohy P1)
Nechť y je bodem extrému úlohy P1. Pak je y řešením Eulerovy rovnice

$$(ER) \qquad F_y(t, y(t), y'(t)) = \frac{d}{dt} F_{y'}(t, y(t), y'(t)), t \in (0, T).$$

Lemma A
Nechť funkce $\varphi \in C(\langle 0, T \rangle)$ je nezáporná a $\int_0^T \varphi(t)dt = 0$
Pak je $\varphi = 0$ na $\langle 0, T \rangle$.

Lemma B
Nechť $a, b \in C(\langle 0, T \rangle)$ a

$$\int_0^T (a(t)h(t) + b(t)h'(t))\, dt = 0$$

pro každou funkci $h \in C^1(\langle 0, T \rangle)$, pro kterou je $h(0) = h(T) = 0$. Pak funkce b má na $(0, T)$ derivaci a platí $b' = a$.

Lemma C
Nechť T, F jsou jako v úloze (P1), $y, u \in C^1(\langle 0, T\rangle)$. Zvolme y a definujme zobrazení $G : C^1(\langle 0, T\rangle) \to R$ takto:

$$G(u) = \int_0^T F\left(t, y(t) + u(t), y'(t) + u'(t)\right) dt.$$

Potom

$$\delta G(0, h) =$$

$$\int_0^T \left(F_y\left(t, y(t), y'(t)\right) h(t) + F_{y'}\left(t, y(t), y'(t)\right) h'(t)\right) dt$$

pro libovolné $h \in C^1(\langle 0, T\rangle)$.

1.4. Úlohy s volným koncem

Pevný koncový čas a volná koncová hodnota (úloha P2)
Dáno: $T \in R, T > 0, A \in R, F \in C^1(\langle 0, T\rangle \times R \times R)$.
Hledáme: $y \in C^1(\langle 0, T\rangle), y(0) = A$ takové, že hodnota funkcionálu

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), y'(s))ds$$

je minimální (resp. maximální).

Věta 6.(Nutná podmínka pro extrém úlohy P2)
Nechť y je bodem extrému úlohy P2. Pak je y řešením Eulerovy rovnice

$$(ER) \qquad F_y(t, y(t), y't) = \frac{d}{dt} F_{y'}(t, y(t), y'(t)), t \in (0, T)$$

a splňuje podmínku transverzality

$$(T1) \qquad F_{y'}(T, y(T), y'(T)) = 0.$$

Truncated vertical terminal line (úloha P3)

(Koncová hodnota omezená nerovností)

Dáno:
$A \in R, T \in R, T > 0, Z \in R, F \in C^1\,(\langle 0, T\rangle \times R \times R)$.
Hledáme: $y \in C^1(\langle 0, T\rangle), y(0) = A, y(T) \geq Z$ takové,
že hodnota funkcionálu

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), y'(s))ds$$

je minimální.

Věta 7.(Nutná podmínka pro extrém úlohy P3)
Nechť y je bodem minima úlohy P3. Pak je y řešením Eulerovy rovnice

$$(ER) \qquad F_y(t, y(t), y't) = \frac{d}{dt} F_{y'}(t, y(t), y'(t)), t \in (0, T)$$

a splňuje podmínky transverzality, t.j. buď platí

$$(T2) \qquad y(T) > Z \Rightarrow F_{y'}(T, y(T), y'(T)) = 0,$$

nebo

$$(T3) \qquad y(T) = Z \Rightarrow F_{y'}(T, y(T), y'(T)) \geq 0.$$

Poznámka

Podmínky transverzality (T2) a (T3) je možné zformulovat také takto: Současně platí

$$y(T) - Z \geq 0, F_{y'}(T, y(T), y'(T)) \geq 0,$$

a

$$(y(T) - Z)F_{y'}(T, y(T), y'(T)) = 0.$$

Náznak dukazu

Funkce y je extrém funkcionálu V vzhledem k množině $M = \{z \in C^1(\langle 0, T\rangle), z(0) = A, z(T) \geq Z\}$. Taková z mužeme psát ve tvaru $z = y + h$, kde $h \in C^1(\langle 0, T\rangle), h(0) = 0$ a $h(T) \geq 0$, je-li $y(T) = Z$, a $h(T) \geq Z - y(T)$ (což je záporné), je-li $y(T) > Z$. Zvolme takové h a položme pro dostatečně malá ϵ

$$\mathcal{V}(\epsilon) = \int_0^T F(s, y(s) + \epsilon h(s), y'(s) + \epsilon h'(s))ds.$$

Podle vět o derivování integrálu spočítáme

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \epsilon}(0) = \int_0^T F_y(s, y(s), y'(s))h(s) + F_{y'}(s, y(s), y'(s))h'(s)ds.$$

Protože $\mathcal{V}$ nabývá v bodě $\epsilon = 0$ minima vzhledem k úsečce $\langle y, y + h\rangle$, je derivace zprava funkcionálu $\mathcal{V}$ v bodě y a směru h nezáporná.

V množině přípustných funkcí leží všechny spojitě diferencovatelné funkce h s $h(T) = 0$. Obvyklým zpusobem zjistíme, že y řeší Eulerovu rovnici. Pro obecná přípustná h z podmínky $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \epsilon}(0) \geq 0$ dostáváme
$F_{y'}(T, y(T), y'(T))h(T) \geq 0$.
Je-li $y(T) = Z$, je $h(T) \geq 0$ a tedy i $F_{y'}(T, y(T), y'(T)) \geq 0$.
Je-li $y(T) > Z$, muže $h(T)$ nabývat kladných i záporných hodnot, tedy $F_{y'}(T, y(T), y'(T)) = 0$.

Volný koncový čas a koncová hodnota (úloha P4)
Dáno: $A \in R, F \in C^1(\langle 0, \infty\rangle \times R \times R)$.
Hledáme: $T \in R$, $T > 0, y \in C^1(\langle 0, T\rangle), y(0) = A$ takové, že hodnota funkcionálu

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), y'(s))ds$$

je minimální (resp. maximální).

Věta 8.(Nutná podmínka pro extrém úlohy P4)
Nechť dvojice T, y je bodem extrému úlohy P4. Pak je y řešením Eulerovy rovnice

$$(ER) \qquad F_y(t, y(t), y't) = \frac{d}{dt} F_{y'}(t, y(t), y'(t)), t \in (0, T)$$

a splňuje podmínky transverzality

$$(T4) \qquad F_{y'}(T, y(T), y'(T)) = 0.$$

$$(T5) \qquad F(T, y(T), y'(T)) = 0.$$

Volný koncový čas (úloha P5)
Dáno: $A, Z \in R, F \in C^1(\langle 0, \infty\rangle \times R \times R)$.
Hledáme:
$T \in R, T > 0, y \in C^1(\langle 0, T\rangle), y(0) = A, y(T) = Z$ takové, že hodnota funkcionálu

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), y'(s))ds$$

je minimální (resp. maximální).

Věta 9.(Nutná podmínka pro extrém úlohy P5)
Nechť dvojice T, y je bodem extrému úlohy P5. Pak je y řešením Eulerovy rovnice

$$(ER) \qquad F_y(t, y(t), y't) = \frac{d}{dt} F_{y'}(t, y(t), y'(t)), t \in (0, T)$$

a splňuje podmínku transverzality

$$(T6) \qquad F(T, y(T), y'(T)) - y'(T) F_{y'}(T, y(T), y'(T)) = 0.$$

Truncated horizontal terminal line (úloha P6)
(Koncový čas daný nerovností, pevná koncová hodnota)
Dáno: $A, Z, T^* \in R, T^* > 0, F \in C^1(\langle 0, \infty\rangle \times R \times R)$.
Hledáme:
$T \in R, T > 0, T \leq T^*, y \in C^1(\langle 0, T\rangle), y(0) = A, y(T) = Z$
takové,
že hodnota funkcionálu

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), y'(s))ds$$

je minimální.

Věta 10.(Nutná podmínka pro extrém úlohy P6)
Nechť dvojice T, y je bodem minima úlohy P6. Pak je y řešením Eulerovy rovnice

$$(ER) \qquad F_y(t, y(t), y' t) = \frac{d}{dt} F_{y'}(t, y(t), y'(t)), t \in (0, T)$$

a splňuje podmínky transverzality (T7)

$$T \leq T^*, F(T, y(T), y'(T)) - y'(T) F_{y'}(T, y(T), y'(T)) \leq 0,$$

$$(T - T^*)\,(F(T, y(T), y'(T)) - y'(T) F_{y'}(T, y(T), y'(T))) = 0.$$

1.5. Izoperimetrické úlohy

Izoperimetrická úloha (P7)

Dáno: $A, Z, B, T \in R$, $T > 0$ a $F \in C^1(\langle 0, T\rangle \times R \times R)$, $G \in C^1(\langle 0, T\rangle \times R \times R)$.
Hledáme: $y \in C^1(\langle 0, T\rangle), y(0) = A, y(T) = Z$ takové, že

$$\int_0^T G(t, y(t), y'(t))dt = B$$

a hodnota funkcionálu

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), y'(s))ds$$

je minimální (resp. maximální).

Věta 11.(Nutná podmínka pro extrém úlohy P7)
Je-li y je bodem maxima (resp minima) úlohy P7, pak je buď

$$G_y(t, y(t), y't) = \frac{d}{dt} G_{y'}(t, y(t), y'(t)), t \in (0, T),$$

nebo existuje $\lambda \in R$ tak, že

$$F_y(t, y(t), y't) - \lambda G_y(t, y(t), y't) =$$

$$\frac{d}{dt} \left(F_{y'}(t, y(t), y'(t)) - \lambda G_{y'}(t, y(t), y'(t)) \right), t \in (0, T).$$

1.6. Úlohy s více stavovými proměnnými

Úloha s dvěma stavovými proměnnými (P8)
(Pevný koncový čas a hodnota)

Dáno: $T \in R, T > 0; A = [A_1, A_2], Z = [Z_1, Z_2] \in R^2$ a $F \in C^1\left(\langle 0, T\rangle \times R^2 \times R^2\right)$.
Hledáme: $y = [y_1, y_2], y_j \in C^1(\langle 0, T\rangle)$ pro $j = 1, 2$, $y(0) = A, y(T) = Z$ takové, že hodnota funkcionálu

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), y'(s))ds$$

je minimální (resp. maximální).

Věta 12.(Nutná podmínka pro extrém úlohy P8)
Nechť y je bodem extrému úlohy P8. Pak je každá složka $y_j, j = 1, 2,$ řešením Eulerovy rovnice

$$(ER) \qquad F_{y_j}(t, y(t), y'(t)) = \frac{d}{dt} F_{y_j'}(t, y(t), y'(t)), t \in (0, T).$$

1.7 Úlohy s nekonečným horizontem

Formulace základní úlohy P9
Dáno: $A \in R$ a $F \in C^1(\langle 0, \infty) \times R \times R)$.
Hledáme: $y \in C^1(\langle 0, \infty)), y(0) = A$ takové, že

$$V(y) = \int_0^\infty F(s, y(s), y'(s)) ds$$

je minimální (resp. maximální).

Přípravné úvahy o konvergenci integrálu

Definice

Nechť $f : (a, b) \to R$. Řekneme, že $\int_a^b f(t)dt$ konverguje (v Newtonově smyslu), jestliže existuje primitivní funkce F k f na (a, b) a existují vlastní limity $\lim_{t\to a+} F(t)$ a $\lim_{t\to b-} F(t)$. Hodnotou integrálu pak rozumíme

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{t\to b-} F(t) - \lim_{t\to a+} F(t).$$

Příklad 1.
$\int_1^\infty t^\alpha dt$ konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$.
Příklad 2.
$\int_0^\infty e^{-\alpha t} dt$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 0$.

Tvrzení 1 (o integrovatelné majorantě)
Nechť f, g jsou spojité na (a, b) a $|f| \leq g$. Jestliže $\int_a^b g(t)dt$ konverguje, pak i $\int_a^b f(t)dt$ konverguje.

Funkci g nazveme integrovatelnou majorantou.

Příklad
Nechť $\rho > 0$ a funkce $t \in \langle 0, \infty) \to f(t) = F(t, y(t), y'(t))$ je omezená na $\langle 0, \infty)$. Pak $\int_0^\infty F(t, y(t), y'(t))e^{-\rho t}dt$ konverguje.

Tvrzení 2 (o typické majorantě)
Nechť $F = F(y, z)$ je funkce dvou proměnných, která je spojitá na R^2 a nechť $y \in C^1(\langle 0, \infty))$ je omezená funkce s omezenou derivací a $\rho > 0$. Pak $\int_0^\infty F(y(t), y'(t))e^{-\rho t}dt$ konverguje.

Věta 13 (derivace integrálu na intervalu nekonečné délky)
Buďte $a, b, c, d \in R^*$. Nechť f a $\partial_1 f$ jsou spojité na $(a, b) \times (c, d)$ a platí:

(i) existuje funkce $g : (c, d) \to R$ taková, že $\int_c^d g(x)dx$ konverguje a současně $|\partial_1 f(y, x)| \leq g(x)$ pro všechna $y \in (a, b), x \in (c, d)$;

(ii) existuje $y_o \in (a, b)$ takové, že $\int_c^d f(y_o, x)dx$ konverguje.

Pak $F(y) = \int_c^d f(y, x)dx \in C^1((a, b))$ a platí

$$F'(y) = \int_c^d \partial_1 f(y, x)dx.$$

Věta 14.(Nutná podmínka pro extrém úlohy P9)
Nechť F v formulaci úlohy P9 má tvar

$$F(t, y(t), y'(t)) = G(y(t), y'(t))e^{-\rho t},$$

kde $\rho > 0$ a $G \in C^1(R^2)$. Je-li y je bodem maxima (resp. minima) úlohy P9 a y, y' jsou omezené na $\langle 0, \infty)$, pak platí

$$F_y(t, y(t), y't) = \frac{d}{dt}(F_{y'}(t, y(t), y'(t)), t \in (0, \infty).$$

Izoperimetrická úloha s nekonečným horizontem

Formulace základní úlohy P10
Dáno: $A \in R, F \in C^1\left(\langle 0, \infty) \times R \times R\right)$ a $G \in C^1\left(\langle 0, \infty) \times R \times R\right), B \in R$.
Hledáme: $y \in C^1(\langle 0, \infty)), y(0) = A$ takové, že

$$\int_0^\infty G(t, y(t), y'(t))dt = B$$

a funkcionál

$$V(y) = \int_0^\infty F(s, y(s), y'(s))ds$$

je minimální (resp. maximální).

Věta 15.(Nutná podmínka pro extrém úlohy P10)

Nechť F a G ve formulaci úlohy P10 mají tvar

$$F(t, y(t), y'(t)) = \tilde{F}(y(t), y'(t))e^{-\rho_1 t},$$

kde $\tilde{F} \in C^1(R \times R), \rho_1 > 0$,

$$G(t, y(t), y'(t)) = \tilde{G}(y(t), y'(t))e^{-\rho_2 t},$$

kde $\tilde{G} \in C^1(R \times R), \rho_2 > 0$.
Je-li y je bodem maxima (resp. minima) úlohy P10 a y, y' jsou omezené na $\langle 0, \infty)$, pak platí buď

$$G_y(t, y(t), y'(t)) = \frac{d}{dt} G_{y'}(t, y(t), y'(t)), t \in (0, \infty)$$

nebo existuje $\lambda \in R$ tak, že

$$F_y(t, y(t), y'(t)) - \lambda G_y(t, y(t), y'(t)) =$$

$$\frac{d}{dt}\left(F_{y'}(t, y(t), y'(t)) - \lambda G_{y'}(t, y(t), y'(t))\right), t \in (0, \infty).$$

1.8 Globální extrémy

Definice (Konvexní množina)

Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Řekneme, že M je konvexní, jestliže pro každé dva body $x, y \in M$ a pro každé $t \in \langle 0, 1 \rangle$ je i $z = tx + (1-t)y \in M$.

Definice (Konvexní a konkávní funkcionál)

Nechť X je vektorový prostor, $M \subset X$ je konvexní a $V : M \to R$ je funkcionál na M. Řekneme, že V je konvexní na M (resp. konkávní na M), pokud platí

$$\forall\ x, y, \in M,\ \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : V(tx+(1-t)y) \leq tV(x)+(1-t)V(y)$$

(resp.

$$\forall\ x, y, \in M,\ \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : V(tx+(1-t)y) \geq tV(x)+(1-t)V(y)).$$

Poznámka

Funkcionál $V : X \to R$ je konvexní na X, právě když je konvexní na každé přímce v X, tj. když $\forall x \in X, \forall k \in X$ je $t \to V(x + tk)$ konvexní na R. Analogické tvrzení platí pro konkávní funkcionály a pro funkcionály definované na množině $M \subset X$.

Věta 16.(Postačující podmínky pro minimum konvexního funkcionálu)
Nechť $M \subset X$ je konvexní a $V : M \to R$ je konvexní. Jestliže $\delta_+ V(x, h - x) \geq 0$ pro každé $h \in M$, pak V nabývá v bodě x minima vzhledem k M.

Věta 17.(Konvexita funkcionálu a konvexita integrandu)
Buď M konvexní podmnožina prostoru $C^1(\langle 0, T\rangle)$. Nechť $F \in C^1(\langle 0, T\rangle \times R \times R)$ splňuje podmínku (K), tj. platí
Nechť pro každé $s \in \langle 0, T\rangle$ je funkce $[y, y'] \to F(s, y, y')$ konvexní.
Pak je funkcionál $V : M \to R$ definovaný předpisem

$$V : y \to \int_0^T F(s, y(s), y'(s))ds$$

konvexní na množině M.

Označení

Nechť $F \in C^2(R^2)$. Označíme

$$\delta_1 H(x,z) = \frac{\partial H}{\partial x}(x,z), \delta_2 H(x,z) = \frac{\partial H}{\partial z}(x,z)$$

$$\delta_{11} H(x,z) = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,z), \delta_{12} H(x,z) = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z}(x,z)$$

$$\delta_{21} H(x,z) = \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial x}(x,z), \delta_{22} H(x,z) = \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}(x,z).$$

Věta 18.Konvexita a definitnost matice druhých derivací

Nechť $H \in C^2(R^2)$. Pokud je matice

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \delta_{11} H & \delta_{12} H \\ \delta_{21} H & \delta_{22} H \end{pmatrix}$$

pozitivně semidefinitní na R^2, pak je H konvexní na R^2.

Poznámky

1. Matice $\mathcal{H}$ se obvykle nazývá Hessova matice nebo Hessián funkce H.

2. Matice $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ je negativně semidefinitní na R^2 právě tehdy, když $a \leq 0, c \leq 0, b^2 - ac \leq 0$ a pozitivně semidefinitní na R^2 právě tehdy, když $a \geq 0, d \geq 0, b^2 - ac \leq 0$.

Věta 19.(Předpoklady, za nichž je nutná podmínka také postačující)
Nechť $F \in C^2(\langle 0, T\rangle \times R \times R)$ v (P1) splňuje podmínku (K). Pak je Eulerova rovnice (ER) postačujicí podmínkou k tomu, aby funkcionál V nabýval v y minima.

Rozmyslete si obdobná tvrzení v dalších úlohách.

1.9 Lokální extrémy

Definice(Normovaný lineární prostor)
Normovaný lineární prostor je dvojice $(X, ||.||)$, kde X je vektorový prostor nad R a $||.||$ je norma na prostoru X, tj. zobrazení definované na X s hodnotami v $\langle 0, \infty)$ splňující

$$\forall x \in X : ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$\forall x \in X, \forall \alpha \in R : ||\alpha x|| = |\alpha| ||x||,$$

$$\forall x, y \in X : ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

Definice(Ostré a neostré lokální extrémy)

Nechť $(X, ||.||)$ je normovaný lineární prostor, $f : X \to R$ a $x_o \in X$. Řekneme, že f má v bodě $x_o \in X$

lokální maximum, jestliže existuje $r > 0$ takové, že

$$\forall x \in X, ||x - x_o|| < r : f(x) \leq f(x_o);$$

ostré lokální maximum, jestliže existuje $r > 0$ takové, že

$$\forall x \in X, 0 < ||x - x_o|| < r : f(x) < f(x_o);$$

lokální minimum, jestliže existuje $r > 0$ takové, že

$$\forall x \in X, ||x - x_o|| < r : f(x) \geq f(x_o);$$

ostré lokální minimum, jestliže existuje $r > 0$ takové, že

$$\forall x \in X, 0 < ||x - x_o|| < r : f(x) > f(x_o).$$

Definice (Norma v prostoru C^1)
V prostoru $X = C^1(\langle 0, T\rangle)$ definujeme normu takto: pro $y \in C^1(\langle 0, T\rangle)$ je

$$||y|| = \sup\{|\mathrm{y(t)}|; \mathrm{t} \in \langle 0, \mathrm{T}\rangle)\} + \sup\{|\mathrm{y}'(\mathrm{t})|; \mathrm{t} \in \langle 0, \mathrm{T}\rangle)\}.$$

Věta 20.(Postačující podmínka pro lokální extrém)
Nechť y řeší Eulerovu rovnice v úloze P1. Jestliže je matice

$$\begin{pmatrix} F_{yy}(t, y(t), y'(t)) & F_{yy'}(t, y(t), y'(t)) \\ F_{y'y}(t, y(t), y'(t)) & F_{y'y'}(t, y(t), y'(t)) \end{pmatrix}$$

pozitivně definitní pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$, pak je y bodem ostrého lokálního minima.

2. Teorie optimálního řízení

2.1. Základní úloha

Základní definice

Po částech spojitá funkce

Řekneme, že funkce g je na intervalu $\langle 0, T \rangle$ po částech spojitá, jestliže existuje dělení $0 = t_0 < t_1, ..., t_n = T$ takové, že g je spojitá na (t_{i-1}, t_i) pro všechna $i = 1, ..., n$ a v krajních bodech existují vlastní limity funkce g.

Po částech diferencovatelná funkce

Řekneme, že funkce g je na intervalu $\langle 0, T \rangle$ po částech diferencovatelná, jestliže existuje dělení $0 = t_0 < t_1, ..., t_n = T$ takové, že derivace g' je spojitá na (t_{i-1}, t_i) pro všechna $i = 1, ..., n$ a v krajních bodech existují vlastní limity funkce g'.

Formulace úlohy P11 - volná koncová hodnota, pevný koncový čas

Dáno: $T \in R, T > 0, A \in R$ a $f, F \in C\left(\langle 0, T\rangle \times R \times R\right)$, $\partial_2 f, \partial_3 f, \partial_2 F, \partial_3 F \in C\left(\langle 0, T\rangle \times R \times R\right)$ a $U \subset R$ uzavřený interval.

Hledáme:
y spojitou a po částech diferencovatelnou na $\langle 0, T\rangle, y(0) = A$,

$u : \langle 0, T\rangle \to U$ po částech spojitou na $\langle 0, T\rangle$ takové, že

$$y'(t) = f(t, y(t), u(t))$$

na $\langle 0, T\rangle$ s výjimkou kone?né množiny a hodnota funkcionálu

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), u(s))ds$$

je maximální.

Poznámky

1. Hodnota $y(T)$ je volná.
2. Předpoklad "$U \subset R$ je uzavřený interval" znamená, že U je jeden z interval? $R, (-\infty, a\rangle, \langle b, \infty), \langle c, d\rangle$, kde $a, b, c, d \in R, c < d$.
3. Funkci u nazveme řídící funkcí, funkci y stavovou funkcí a rovnici $y' = f(t, y(t), y'(t))$ stavovou rovnicí.

Definice (Hamiltonián)

Funkci

$$H(y, u, \lambda) = F(t, y, u) + \lambda f(t, y, u)$$

nazveme Hamiltoniánem úlohy P11.

Věta 21.(Nutná podmínka pro extrém úlohy P11, Pontryaginuv princip maxima)
Buď y^*, u^* bodem maxima úlohy P11. Pak existuje funkce $\lambda : \langle 0, T\rangle \to R$ taková, že pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$ až na konečnou množinu platí:
(I) (maximalita u^*)
pro každé $u \in U$ je

$$H(t, y^*(t), u^*(t), \lambda(t)) \geq H(t, y^*(t), u, \lambda(t)),$$

(II) (stavová rovnice)

$$(y^*)'(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, y^*(t), u^*(t), \lambda(t)),$$

(III) (pohybová rovnice pro λ)

$$\lambda'(t) = -\frac{\partial H}{\partial y}(t, y^*(t), u^*(t), \lambda(t)),$$

(IV) (podmínka transverzality)

$$\lambda(T) = 0.$$

Náznak dukazu

Předpokládejme pro jednoduchost, že $U = R$ a všechny uvažované funkce jsou spojitě diferencovatelné na svých definičních oborech. Derivaci podle proměnné t značíme čárkou.

1. krok:
Označme M množinu dvojic $[y, u]$ takových, že $y(0) = A, y'(t) = f(t, y(t), u(t))$ na $\langle 0, T\rangle$. Jsou-li funkce u, f spojité, je počáteční podmínkou $y(0) = A$ a stavovou rovnicí $y' = f(t, y, u)$ jednoznačně určena funkce y.

Pro každou reálnou funkci λ, funkci $y \in M$ a $t \in \langle 0, T \rangle$ je výraz $\lambda(t)(f(t, y(t), u(t)) - y'(t))$ nulový. Mužeme tedy psát, že pro $y \in M$ je

$$V(y, u) = \int_0^T F(t, y(t), u(t))dt =$$

$$\int_0^T F(t, y(t), u(t)) + \lambda(t) \left(f(t, y(t), u(t)) - y'(t) \right) dt.$$

2. krok: Předpokládejme, že $[y^*, u^*]$ je bodem maxima funkcionálu V na množině M, tj. pro každé $[y, u] \in M$ je

$$V(y, u) \leq V(y^*, u^*)$$

.

Pro $a \in R$ zvolme $u^a(t) = u^*(t) + ah(t)$ a označme $y^a(t)$ řešení stavové rovnice

$$(y^a)' = f(t, y^a, u^a),$$

pro které je $y^a(0) = A$. (Pak je $[y^a, u^a] \in M$ a tedy $\lambda(f(t, y^a, u^a) - (y^a)') = 0$.)
Označme

$$J(a) = V(y^a, u^a) = \int_0^T F(t, y^a(t), u^a(t))dt =$$

$$\int_0^T F(t, y^a(t), u^a(t)) + \lambda(t)\left[f(t, y^a(t), u^a(t)) - (y^a)'(t)\right]dt.$$

Integrujeme-li per partes ve členu s derivací $(y^a)'$ v integrálu $J(a)$, dostaneme

$$J(a) =$$

$$\int_0^T \{F(t, y^a(t), u^a(t)) + \lambda(t) f(t, y^a(t), u^a(t)) + \lambda'(t) y^a(t)\} dt$$

$$-\lambda(T) y^a(T) + \lambda(0) y^a(0).$$

Funkce $J(a)$ nabývá maxima v bodě $a = 0$ a je diferencovatelná, tedy je $\frac{dJ}{da}(0) = 0$. Spočítejme $\frac{dJ}{da}$ (pro jednoduchost vynecháme argumenty jednotlivých funkcí a použijeme toho, že poslední člen je konstantní). (Opět používáme větu o derivaci integrálu!)

$$\frac{dJ}{da}(a) = \int_0^T \{F_y.\frac{\partial y^a}{\partial a} + F_u.h) + \lambda.(f_y.\frac{\partial y^a}{\partial a} + f_u.h))+$$

$$\lambda'(t)\frac{\partial y^a}{\partial a}(t)\}dt - \lambda(T)\frac{\partial y^a}{\partial a}(T) =$$

$$\int_0^T (F_y + \lambda f_y + \lambda')\frac{\partial y^a}{\partial a} + (F_u + \lambda f_u)hdt - \lambda(T)\frac{\partial y^a}{\partial a}(T).$$

3. krok
Zvolme za λ řešení rovnice

$$\lambda' = -(F_y + \lambda f_y) = -\frac{\partial H}{\partial y},$$

splňující podmínku $\lambda(T) = 0$. Jedná se o lineární rovnici prvního řádu se spojitými koeficienty a pravou stranou, tedy řešení vždy existuje a je to spojitě diferencovatelná funkce na $\langle 0, T \rangle$. Touto volbou se anuluje první a poslední člen ve výrazu pro $J'(0)$. Dále funkce λ splňuje pohybovou rovnici a podmínku transverzality.

4.krok
V rovnici $J'(0) = 0$ zvolme $h = F_u + \lambda f_u$. Dostaneme

$$\int_0^T (F_u + \lambda f_u)^2 dt = 0.$$

Integrand je spojitá nezáporná funkce a z lemmatu A plyne $F_u + \lambda f_u = 0$. Tím je dukaz v tomto zjednodušeném případě dokončen.

2.2 Další koncové podmínky

Formulace úlohy P12- pevná koncová hodnota i koncový čas)

Dáno: $T \in R, T > 0, A \in R, Z \in R$ a
$f, F \in C\left(\langle 0, T\rangle \times R \times R\right)$,
$\partial_2 f, \partial_3 f, \partial_2 F, \partial_3 F \in C\left(\langle 0, T\rangle \times R \times R\right)$ a $U \subset R$ uzavřený interval.

Hledáme:
y spojitou a po částech diferencovatelnou na $\langle 0, T\rangle, y(0) = A, y(T) = Z$,

$u : \langle 0, T\rangle \to U$ po částech spojitou na $\langle 0, T\rangle$ takové, že

$$y'(t) = f(t, y(t), u(t))$$

na $\langle 0, T\rangle$ s výjimkou konečné množiny

a hodnota funkcionálu

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), u(s))ds$$

je maximální.

Věta 22.(Nutná podmínka pro extrém úlohy P12)
Buď y^*, u^* bodem maxima úlohy P12. Pak existuje funkce $\lambda : \langle 0, T\rangle \to R$ taková, že pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$ až na konečnou množinu jsou splněny podmínky (I), (II), (III) z věty 21 a podmínka transverzality (IV) z věty 21 je nahrazena podmínkou $y(T) = Z$.

Formulace úlohy P13 (Horizontal terminal line - pevná koncová hodnota, volný koncový čas)

Dáno: $A \in R, Z \in R$ a $f, F \in C(\langle 0, T\rangle \times R \times R)$, $\partial_2 f, \partial_3 f, \partial_2 F, \partial_3 F \in C(\langle 0, T\rangle \times R \times R)$ a $U \subset R$ uzavřený interval.

Hledáme:
$T \in R, T > 0$

y spojitou a po částech diferencovatelnou na $\langle 0, T\rangle, y(0) = A, y(T) = Z,$

$u : \langle 0, T\rangle \rightarrow U$ po částech spojitou na $\langle 0, T\rangle$ takové, že

$$y'(t) = f(t, y(t), u(t))$$

na $\langle 0, T\rangle$ s výjimkou konečné množiny

a hodnota funkcionálu

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), u(s))ds$$

je maximální.

Věta 23.(Nutná podmínka pro extrém úlohy P13)

Buď y^*, u^* bodem maxima úlohy P13, pak existuje funkce $\lambda : \langle 0, T \rangle \to R$ taková, že pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$ až na konečnou množinu jsou splněny podmínky (I), (II), (III) z věty 21 a podmínka transverzality (IV) z věty 21 je nahrazena podmínkou $H(T, y(T), u(T), \lambda(T)) = 0$.

Formulace úlohy P14 - truncated vertical terminal line

Dáno: $T \in R, T > 0, A \in R, Z \in R$ a
$f, F \in C(\langle 0, T\rangle \times R \times R)$,
$\partial_2 f, \partial_3 f, \partial_2 F, \partial_3 F \in C(\langle 0, T\rangle \times R \times R)$ a $U \subset R$ uzavřený interval.

Hledáme:
y spojitou a po částech diferencovatelnou na
$\langle 0, T\rangle, y(0) = A, y(T) \geq Z,$

$u : \langle 0, T\rangle \to U$ po částech spojitou na $\langle 0, T\rangle$ takové, že

$$y'(t) = f(t, y(t), u(t))$$

na $\langle 0, T\rangle$ s výjimkou konečné množiny

a hodnota funkcionálu

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), u(s))ds$$

je maximální.

Věta 24.(Nutná podmínka pro extrém úlohy P14)
Buď y^*, u^* bodem maxima úlohy P14, pak existuje funkce $\lambda : \langle 0, T\rangle \to R$ taková, že pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$ až na konečnou množinu jsou splněny podmínky (I), (II), (III) z v?ty 21 a podmínka transverzality (IV) z v?ty 21 je nahrazena podmínkami

$$y(T) \geq Z, \lambda(T) \geq 0, (y(T) - Z)(\lambda(T)) = 0.$$

Formulace úlohy P15 - horizontal terminal line

Dáno: $T_{max} \in R, T_{max} > 0, A \in R, Z \in R$ a
$f, F \in C\left(\langle 0, T \rangle \times R \times R\right)$,
$\partial_2 f, \partial_3 f, \partial_2 F, \partial_3 F \in C\left(\langle 0, T \rangle \times R \times R\right)$ a $U \subset R$ uzavřený interval.

Hledáme:
y spojitou a po částech diferencovatelnou na
$\langle 0, T \rangle, y(0) = A, y(T) \geq Z,$

$u : \langle 0, T \rangle \to U$ po částech spojitou na $\langle 0, T \rangle$ takové, že

$$y'(t) = f(t, y(t), u(t))$$

na $\langle 0, T \rangle$ s výjimkou konečné množiny

a hodnota funkcionálu

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), u(s))ds$$

je maximální.

Věta 24.(Nutná podmínka pro extrém úlohy P14)
Buď y^*, u^*, T^* bodem maxima úlohy P14, pak existuje funkce $\lambda : \langle 0, T\rangle \to R$ taková, že pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$ až na konečnou množinu jsou splněny podmínky (I), (II), (III) z věty 21 a podmínka transverzality (IV) z věty 21 je nahrazena podmínkami

$$T^* \leq T_{max}, H(T^*) \geq 0, (T^* - T_{max})H(T^*) = 0.$$

2.3 Problémy s více stavovými nebo řídícími proměnnými

Formulace úlohy P15(Volná koncová hodnota)

Dáno: $n, m \in N$, $T \in R$, $T > 0$, $F \in C^1(\langle 0, T\rangle \times R^n \times R^m)$, $f_i \in C^1(\langle 0, T\rangle \times R^n \times R^m)$ pro $i = 1, ..., n$, $y_o = [y_{o1}, ..., y_{on}] \in R^n$, $U_1, , , U_m$ jsou uzavřené intervaly v R.

Hledáme: $y = [y_1, ..., y_n]$ spojité a po částech diferencovatelné na $\langle 0, T\rangle$ a $u = [u_1, ..., u_m]$ po částech spojité na $\langle 0, T\rangle$, splňující

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, ..., y_n, u_1, ..., u_m), \quad y_1(0) = y_{o1}, \\ &\cdots \\ y_n' &= f_n(t, y_1, ..., y_n, u_1, ..., u_m) \quad y_n(0) = y_{on} \end{aligned}$$

a

funkce $u_1(t) \in U_1, ...u_m(t) \in U_m$ na $\langle 0, T \rangle$ s výjimkou konečné množiny takové, že

$$V(y, u) = \int_0^T F(t, y_1, , , y_n, u_1, ..., u_m) dt$$

je maximální.

Značení

Označíme

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_m \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}, y_o = \begin{pmatrix} y_{o1} \\ \dots \\ y_{on} \end{pmatrix}$$

$$U = U_1 \times ... \times U_m.$$

a zapíšeme úlohu 15 takto

$$u(t) \in U, y' = f(t, y, u), y(0) = y_o,$$

a $V(y, u)$ je maximální.
Dále označíme

$$H = F(t, y, u) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(t, y, u).$$

Věta 25 (princip maxima pro P15)

Buď y^*, u^* bodem maxima v úloze P15. Pak existuje funkce $\lambda : \langle 0, T\rangle \to R^n$ taková, že pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$ až na konečnou množinu platí:
(I) pro každé $u \in U$ platí

$$H(t, y^*(t), u(t), \lambda(t)) \leq H(t, y^*(t), u^*(t), \lambda(t)),$$

(II) (stavová rovnice)

$$y^{*}{}'_j(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_j}(t, y^*(t), u^*(t), \lambda(t)),$$

(III) (pohybová rovnice pro λ)

$$\lambda'_j(t) = -\frac{\partial H}{\partial y_j}(t, y^*(t), u^*(t), \lambda(t)),$$

(IV) (podmínka transverzality)

$$\lambda_j(T) = 0.$$

pro každé $j = 1, ..., n$.

2.4 Izoperimetrická úloha v teorii optimálního řízení

Formulace úlohy P16(Volná koncová hodnota)

Dáno:
$T \in R, T > 0, y_o \in R, B \in R, F, f, G \in C^2(\langle 0, T\rangle \times R \times R)$
Hledáme: y po částech diferencovatelné, u po částech spojité tak, že $[y, u]$ je maximem funkcionálu

$$V(y, u) = \int_0^T F(t, y(t), u(t))dt$$

a platí $y(0) = y_o, y' = f(t, y(t), u(t))$ a
$\int_0^T G(t, y(t), u(t))dt = B$.

Dukaz provedeme převedením úlohy P16 na problém P15. Definujme novou stavovou proměnnou Γ vztahem

$$\Gamma'(t) = G(t, y(t), u(t)), \Gamma(0) = 0.$$

Pak je

$$\Gamma(t) = \int_0^t G(s, y(s), u(s))ds, \Gamma(T) = B.$$

Použijeme nutnou podmínku pro úlohu se dvěma stavovými proměnnými y, Γ a jednou řídící proměnnou u z Věty 25. Definujeme

$$H(t) = F + \lambda_1 f + \lambda_2 G.$$

Věta 27(princip maxima pro P17)

Buď y^*, u^* bodem maxima v úloze P17. Pak existuje funkce $\lambda : \langle 0, T\rangle \to R^2$ taková, že pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$ až na konečnou množinu platí:
(I) pro každé $u \in U$ platí

$$H(t, y^*(t), \Gamma^*(t), u(t), \lambda(t)) \leq H(t, y^*(t), \Gamma^*(t), u^*(t), \lambda(t)),$$

(II) (stavové rovnice)

$$y^{*\prime}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1}(t, y^*(t), \Gamma^*(t), u^*(t), \lambda(t)),$$

$$\Gamma^{*\prime}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_2}(t, y^*(t), \Gamma^*(t), u^*(t), \lambda(t)),$$

(III) (pohybová rovnice pro λ)

$$\lambda_1'(t) = -\frac{\partial H}{\partial y}(t, y^*(t), \Gamma^*(t,)u^*(t), \lambda(t)),$$

$$\lambda_2'(t) = -\frac{\partial H}{\partial \Gamma}(t, y^*(t), \Gamma^*(t,)u^*(t), \lambda(t)),$$

(IV) (podmínky transverzality)

$$\lambda_1(T) = 0, \Gamma^*(T) = B.$$

2.6 Postačující podmínky pro extrém

Věta 27 (Postačující podmínka pro extrém v úloze P11)
Předpokládejme, že F, f jsou diferencovatelné a konkávní funkce proměnných y, u a platí buď
1. f je lineární v y a v u
nebo
2. λ je nezáporná na $\langle 0, T \rangle$.
Jestliže y^*, u^*, λ splňují Pontryaginuv princip maxima, pak funkcionál V nabývá v bodě y^*, u^* maxima ve třídě funkcí z úlohy P11 resp. P12.