

Je následující tvrzení vyřčené nejmenovaným politikem pravdivé?
„Platí presumpce neviny. Pro běžného občana je posvátná a nedotknutelná. U politika ale platí presumpce viny.“

1 Procházka historií

Aristoteles se ve 4. století př. n. l. procházel alejí olivovníků a přemýšlel nad rétorickými a filozofickými argumenty svých přátel. Zažil již mnoho diskuzí a občas mu slova přišla velmi přesvědčivá, avšak... něco mu nesedělo. Jakoby některá tvrzení, které ten den slyšel, nebyla pravdivá. Hlavou mu určitě vířilo mnoho otázek, některé mohly znít třeba takto:

- „Jak najít spolehlivý způsob, který mě jednoznačně dovede k pravdivému poznání?“
- „Jak z obecně platných principů odvodit konkrétní závěry, a tím vytvořit pevné základy pro vědecké myšlení?“
- „Jak dát myšlení řád a jistotu, aby poznání nebylo založeno na názoru, ale na pravdivosti?“

Někteří z nás by možná dokázali odpovědět snadno, ale koncept *pravdy* způsobil závratě mnoha myslitelům napříč stoletími.

Aristoteles chtěl odlišit správné uvažování (dedukci) od pouhého zdání pravdy. Byl průkopníkem systematického zavedení formální logiky. Jeho důležitým přínosem je sylogistická¹ logika.

Podívejme se na příklad:

Všichni lidé jsou smrtelní.

Sokrates je člověk.

→ Sokrates je smrtelný.

Aristoteles definoval rovněž základní pojmy logiky (výrok, predikát, kvantifikátor, kontradikce či implikace). Principy shrnul v souboru spisů zvaném *Organon* (= nástroj), který byl po staletí základem logického myšlení v Evropě. Logika se během středověku stala součástí *trivia*². V 17. století se na matematické scéně objevil Leibniz, který kromě diferenciálního počtu hledal „univerzální jazyk výpočtů“. Logika tedy zkoumá deduktivní postupy a způsoby uvažování, zda platí to, co bylo odvozeno. Pokud bychom se vrátili k citátu v záhlaví této stránky, je dobré si všimnout, že leckterý politik může vycházet z nepravdivých předpokladů.

V 19. a 20. století se matematickou logikou zabývali například Peano, Russel, Gödel, Tarski či Frege, čímž reagovali na potíže matematiky³. Hledání cest, které by matematiku zbavily paradoxů a dopřály jí větší míru jistoty, vedlo k vyšší míře formalizace⁴. Symbolický jazyk nás při studiu matematiky může často velmi potrápit, ale je dobré si uvědomit, že v sobě nese hluboký význam.

¹Sylogismus je logický úsudek složený ze tří výroků: dvou premis (předpokladů) a závěru, který z nich logicky vyplývá.

²Ve středověku označovalo *trivium* (z latinského „trojcestí“) první, nižší stupeň sedmi svobodných umění, zaměřený na zvládnutí jazyka a logické argumentace. Skládalo se ze tří disciplín: gramatiky (rozbor textů, převážně latinských), rétoriky (umění řečnit a psát) a dialektiky (logiky a filozofie).

³Jednou z těchto potíží byl mimo jiné Russelův paradox, o kterém si více povíme příště.

⁴Formalizace: proces přechodu od intuitivního chápání k přesnému definování a odvozování pomocí logických pravidel a symbolického jazyka.

2 Co je výrok?

Zamysleme se nad následujícím paradoxem.

Paradox lháře: Toto tvrzení je nepravdivé.

Výrok = tvrzení, o kterém má smysl rozhodnout, zda je pravdivé nebo nepravdivé.

K čemu mi bude logika?

Logika je základem přesného myšlení a strukturovaného rozhodování — proto je klíčová nejen ve filozofii, ale i v programování a umělé inteligenci. Učí nás pracovat s pravdivostními hodnotami („pravda“ či „nepravda“) a formálně popisovat podmínky, například pomocí Booleovských operací AND, OR, NOT. Ty se využívají při řízení programového toku („pokud je uživatel přihlášen a má práva $\rightarrow$ zobraz obsah“), při návrhu digitálních obvodů (logické hradlo AND propustí signál jen, když oba vstupy mají hodnotu 1), i v umělé inteligenci – třeba při vyhodnocování logických pravidel v expertních systémech. Logické myšlení nám tedy umožňuje převádět reálné problémy do přesného jazyka, který může zpracovávat stroj i člověk.

3 Úlohy

Jednoduchý výrok, negace, pravdivostní hodnota, obecný a existenční kvantifikátor

- Rozhodněte o každé formulaci, zda je, či není výrokem.
 - Hlavním městem České republiky je Brno.
 - $3 < 5$.
 - Pojďte dál!
 - Nechť je x celé číslo.
 - Klaun má červený nos.
 - Každý klaun má červený nos.
- Negujte následující výroky. Vyhněte se však jazykovému obratu „Není pravda, že...“
 - Hlavním městem České republiky je Brno.
 - $3 < 5$.
 - Každý klaun má červený nos.
 - Dnes je pondělí.
- Formulujte následující výroky slovy, negujte je a rozhodněte o jejich pravdivosti, resp. o pravdivosti jejich negace.
 - $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x \cdot y = 5$.
 - $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x \cdot y = 5$.
 - $\exists x \in \mathbb{Z} : |x| = -x$.
- Negujte následující tvrzení.

- (a) Posloupnost (a_n) je neklesající. Formálně:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n.$$

- (b) Řekneme, že posloupnost (a_n) má limitu $A \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A,$$

pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - A| < \varepsilon.$$

5. Najděte logické spojky a kvantifikátory ve větách z lineární algebry.

- (a) Množina $\mathbb{Z}_n$ se sčítáním a násobením modulo n je komutativním tělesem právě tehdy, když je n prvočíslo.
- (b) Charakteristika tělesa je buď nula nebo prvočíslo.
- (c) Množina $R^{n \times n}$ všech čtvercových matic řádu n nad komutativním okruhem R tvoří spolu s operacemi sčítání a násobení okruh. Má-li okruh R jednotkový prvek, má i okruh $R^{n \times n}$ jednotkový prvek.
- (d) Každou permutaci je možno složit z transpozic.
- (e) Jestliže má permutace $P \in S_n$ právě k cyklů, je $\text{sgn } P = (-1)^{n-k}$.
- (f) Každý podprostor vektorového prostoru je jeho direktním sčítancem.

Složený výrok, logické spojky (konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence)

1. Určete pravdivost výroků.

- (a) $5 > 3 \wedge 5 < 3$.
- (b) $5 > 3 \vee 5 < 3$.
- (c) $3 > 5 \rightarrow 3 \mid 6$.
- (d) $2 \cdot 3 = 5 \Leftrightarrow 3 \cdot 2 = 5$.

2. Výroky z předchozího cvičení negujte.

3. Určete pravdivost výroků.

- (a) $\exists n \in \mathbb{N} : 2 \mid n \wedge n < 5$.
- (b) $\exists n \in \mathbb{N} : 2 \mid n \wedge n \mid 15$.
- (c) $\forall x \in \mathbb{Z} : |x| < 0 \vee x^2 < 0$.
- (d) $\forall x \in \mathbb{Z} : |x| = x \vee |x| = -x$.
- (e) $\forall n \in \mathbb{N} : n < 5 \rightarrow 2n < 7$.
- (f) $\forall n \in \mathbb{N} : 2 \mid n \rightarrow n + 1 \geq 3$.
- (g) $\forall q \in \mathbb{R} : 2q < \frac{3}{4} \Leftrightarrow q < \frac{3}{8}$.
- (h) $\forall q \in \mathbb{R} : q > 3 \Leftrightarrow q^2 > 9$.

4. Výroky z předchozího cvičení negujte.

Výroková proměnná, výroková formule, obrácená a obměněná implikace, tautologie, kontradikce

1. Kdy je formule $(A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ nepravdivá?
2. Výrokovou formuli $(A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ negujte a запиšte co nejjednodušší formuli ekvivalentní s touto negací takovou, že obsahuje jen (ne nutně oba) dané dílčí výroky A, B , jejich negace a spojku $\wedge$.
3. Zapište
 - a) obrácenou,
 - b) obměněnou

implikaci k $(A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$. V jakém vzájemném vztahu jsou implikace a její obměna?

4. Definice prosté funkce zní:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Zapište obměněnou implikaci této definice. Jsou dané formulace ekvivalentní?

Důležitými pojmy jsou rovněž tautologie (výrok, který je pro libovolné ohodnocení svých výrokových proměnných vždy pravdivý) a kontradikce (výrok, který je vždy nepravdivý, bez ohledu na pravdivostní hodnotu jeho částí). Zájemci mohou nahlédnout do Matematické logiky nebo do bakalářské práce Výrokový počet: Výukový podklad a řešené příklady.

4 Řešení

Jednoduchý výrok, negace, pravdivostní hodnota, obecný a existenční kvantifikátor

1. Rozhodněte, zda jde o výrok.

- (a) Je to (nepravdivý) výrok.
- (b) Je to (pravdivý) výrok.
- (c) Nejedná se o oznamovací větu, tedy nejde o výrok.
- (d) Nejedná se o oznamovací větu, tedy nejde o výrok.
- (e) Není dost konkrétní (není jasné, který klaun), tedy nejde o výrok.
- (f) Je to výrok, ale bez dat neumíme rozhodnout pravdivost (kvantifikuje „každý“).

2. Negujte následující výroky.

- (a) Hlavním městem České republiky není Brno./ Hlavním městem České republiky je jiná obec než Brno.
- (b) 3 není menší než 5. / 3 je větší nebo rovno 5./ $3 \geq 5$.
- (c) Existuje klaun, který nemá červený nos./ Alespoň jeden klaun má jinou barvu nosu než červenou.

- (d) Dnes není pondělí./ Dnes je jiný den než pondělí./ Dnes je úterý, středa, čtvrtek, pátek, sobota nebo neděle.

Poznámka: Negací (a) není výrok „Hlavním městem České republiky je Praha“, negací (b) není výrok $3 > 5$, negací (c) není výrok „Žádný klaun nemá červený nos“ a obdobně negací (d) není výrok typu „Dnes je středa.“

3. Formulujte, negujte, rozhodněte pravdivost.

- (a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x \cdot y = 5$.
Slovy: „Ke každému reálnému x existuje reálné y takové, že $x \cdot y$ je rovno 5.“ Výrok není pravdivý, neboť pro $x = 0$ nebude rovnost splněna.
Negace: $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x \cdot y \neq 5$. Slovy: „Existuje reálné x takové, že pro každé y je $x \cdot y$ různé od 5.“ Toto tvrzení pravdivé je, stačí, aby existovalo takové x jedno jediné – je jím 0.
- (b) „Existuje reálné x takové, že pro každé y je $x \cdot y$ rovno 5.“ Výrok není pravdivý, protože pokud by takové x existovalo, muselo by se rovnat $\frac{5}{y}$, avšak výraz $\frac{5}{y}$ není pro měnící se y konstantní. Ještě lépe lze pravdivost nahlédnout z pravdivosti negace.
Negace: $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x \cdot y \neq 5$. Slovy: „Ke každému reálnému x existuje reálné y takové, že $x \cdot y$ je různé od 5.“ Toto tvrzení je pravdivé, neboť ke každému číslu x snadno nalezneme alespoň jedno (zřejmě i více) čísel y takových, aby součin $x \cdot y$ byl různý od 5.
- (c) „Existuje celé číslo x takové, že jeho absolutní hodnota je rovna číslu k němu opačnému.“ Výrok je pravdivý. K prokázání pravdivosti stačí nalézt alespoň jedno takové číslo, je jím např. $x = -2$.
Negace: $\forall x \in \mathbb{Z} : |x| \neq -x$. Slovy: „Pro každé celé číslo x platí, že jeho absolutní hodnota je různá od čísla opačného k x .“ Tento výrok pravdivý není, neboť (jak již z výše uvedeného víme) např. pro $x = -2$ rovnost platí.

4. Negace tvrzení o posloupnostech.

- (a) Posloupnost (a_n) je neklesající. Formálně:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n.$$

Negace: Posloupnost (a_n) není neklesající⁵. $\exists n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$.

- (b) Definice limity:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - A| < \varepsilon.$$

Negace:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : |a_n - A| \geq \varepsilon.$$

5. Logické spojky v tvrzeních z LA (ukázka přepisu).

- (a) Množina $\mathbb{Z}_n$ se sčítáním a násobením modulo n je komutativním tělesem **právě tehdy, když** je n prvočíslo.
- (b) Charakteristika tělesa je **bud'** nula **nebo** prvočíslo.

⁵Pozor! Chybné: Posloupnost (a_n) je klesající.

- (c) Množina $R^{n \times n}$ všech čtvercových matic řádu n nad komutativním okruhem R tvoří spolu s operacemi sčítání a násobení okruh. Má-li okruh R jednotkový prvek, má i okruh $R^{n \times n}$ jednotkový prvek. (implikace)
- (d) Každou permutaci je možno složit z transpozic.
- (e) Jestliže má permutace $P \in S_n$ právě k cyklů, je $\text{sgn } P = (-1)^{n-k}$. (implikace)
- (f) Každý podprostor vektorového prostoru je jeho direktním sčítancem.

Složený výrok, logické spojky

1. Určete pravdivost.

- (a) $5 > 3 \wedge 5 < 3$ — *nepravdivý*
- (b) $5 > 3 \vee 5 < 3$ — *pravdivý*
- (c) $3 > 5 \rightarrow 3 \mid 6$ — *pravdivý* ($3 > 5$ není pravdivý výrok, pravdivost druhého výroku je tedy nepodstatná).
- (d) $2 \cdot 3 = 5 \Leftrightarrow 3 \cdot 2 = 5$ — *pravdivý* (ekvivalence dvou nepravdivých výroků).

2. Negace předchozích výroků.

- (a) $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$, tedy $5 \leq 3 \vee 5 \geq 3$.
- (b) $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$, tedy $5 \leq 3 \wedge 5 \geq 3$.
- (c) $\neg(A \rightarrow B) \equiv A \wedge (\neg B)$, tedy $(3 > 5) \wedge (3 \nmid 6)$.
- (d) $\neg(A \Leftrightarrow B) \equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$. Zde $(2 \cdot 3 = 5 \wedge 3 \cdot 2 \neq 5) \vee (2 \cdot 3 \neq 5 \wedge 3 \cdot 2 = 5)$.

3. Určete pravdivost.

- (a) $\exists n \in \mathbb{N} : 2 \mid n \wedge n < 5$ — *pravdivý* (např. $n = 2$).
- (b) $\exists n \in \mathbb{N} : 2 \mid n \wedge n \mid 15$ — *nepravdivý* (dělitele 15 jsou 1, 3, 5, 15).
- (c) $\forall x \in \mathbb{Z} : |x| < 0 \vee x^2 < 0$ — *nepravdivý* (ani $|x| < 0$, ani $x^2 < 0$ nikdy neplatí).
- (d) $\forall x \in \mathbb{Z} : |x| = x \vee |x| = -x$ — *pravdivý* (kladné i záporné x).
- (e) $\forall n \in \mathbb{N} : n < 5 \rightarrow 2n < 7$ — *nepravdivý* (pro $n = 4$ je $8 \nless 7$).
- (f) $\forall n \in \mathbb{N} : 2 \mid n \rightarrow n + 1 \geq 3$ — *pravdivý* (U implikace je rozhodující, zda za předpokladu pravdivého prvního dílčího výroku je pravdivý i druhý dílčí výrok, či nikoliv. Zkoumáme tedy platnost druhého dílčího výroku pro $n \in \{2, 4, 6, 8, \dots\}$. Druhý dílčí výrok lze upravit do tvaru $n \geq 2$. Tuto podmínku však všechna uvažovaná sudá čísla splňují, a tedy je daný výrok pravdivý).
- (g) $\forall q \in \mathbb{R} : 2q < \frac{3}{4} \Leftrightarrow q < \frac{3}{8}$ — *pravdivý* (ekvivalentní nerovnosti).
- (h) $\forall q \in \mathbb{R} : q > 3 \Leftrightarrow q^2 > 9$ — *nepravdivý* (Pravdivost ekvivalence můžeme ověřit prozkoumáním pravdivosti implikací oběma směry. Nejprve uvažujme implikaci zleva doprava. Pokud q splňuje podmínku $q > 3$, pak platí, že $q^2 > 9$. V případě implikace zprava doleva však nejprve předpokládáme, že $q^2 > 9$, z čehož plyne, že q může nabývat libovolné hodnoty z intervalů $(-\infty; -3)$ a $(3; \infty)$, neboli implikace zprava doleva neplatí (např. pro $q = -5$), a tedy i neplatí daný výrok.).

4. Negace těchto výroků.

- (a) $\forall n \in \mathbb{N} : 2 \nmid n \vee n \geq 5$.
- (b) $\forall n \in \mathbb{N} : 2 \nmid n \vee n \nmid 15$.
- (c) $\exists x \in \mathbb{Z} : |x| \geq 0 \wedge x^2 \geq 0$.
- (d) $\exists x \in \mathbb{Z} : |x| \neq x \wedge |x| \neq -x$.
- (e) $\exists n \in \mathbb{N} : n < 5 \wedge 2n \geq 7$.
- (f) $\exists n \in \mathbb{N} : 2 \mid n \wedge n + 1 < 3$.
- (g) $\exists q \in \mathbb{R} : (2q < \frac{3}{4} \wedge q \geq \frac{3}{8}) \vee (2q \geq \frac{3}{4} \wedge q < \frac{3}{8})$.
- (h) $\exists q \in \mathbb{R} : (q > 3 \wedge q^2 \leq 9) \vee (q \leq 3 \wedge q^2 > 9)$.

Výroková proměnná, výroková formule, obrácená a obměněná implikace, tautologie, kontradikce

1. Kdy je formule $(A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ nepravdivá?

Řešení: Formule má podobu implikace. Implikace je nepravdivá pouze tehdy, když je pravdivá její první část a zároveň nepravdivá část druhá. První část, tj. formule $A \vee B$ je pravdivá, je-li alespoň jedna z proměnných A, B pravdivá. Druhá část, tj. formule $A \Rightarrow B$ je nepravdivá pouze tehdy, když je $p(A) = 1$ a $p(B) = 0$. V tomto případě je první část pravdivá, což jsme chtěli. Daná formule je nepravdivá pouze tehdy, když A je pravdivé a B nepravdivé.

2. Výrokovou formuli $(A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ negujte a запиšte co nejjednodušší formuli ekvivalentní s touto negací takovou, že obsahuje jen (ne nutně oba) dané dílčí výroky A, B , jejich negace a spojku $\wedge$.

Řešení: Formule má podobu implikace. Negací implikace je konjunkce první části a negace druhé části, tedy $(A \vee B) \wedge (A \wedge \neg B)$. Formule s touto formulí ekvivalentní je např. $A \wedge \neg B$, což lze ověřit úvahou nebo tabulkou pravdivostních hodnot.

3. Zapište

- a) obrácenou,
- b) obměněnou

implikaci k $(A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$. V jakém vzájemném vztahu jsou implikace a její obměna?

Řešení:

- (a) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \vee B)$.
- (b) $\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(A \vee B)$, neboli $(A \wedge \neg B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$.

Implikace a její obměna jsou navzájem ekvivalentní.

4. Její **obměna** je logicky ekvivalentní formulace:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Tento tvar vyjadřuje, že *různé argumenty mají různé hodnoty funkce*. Obě formulace popisují stejný vztah, pouze z opačné logické perspektivy.

Je dobré si uvědomit, že na obě definice můžeme v materiálech narazit, viz Portál SŠ matematiky - funkce, Injektivní funkce.