

Matematický proseminář: závěrečný test

- Čas na vypracování písemné práce je přibližně **60 minut**.
- Maximální počet bodů je **20**, pro úspěšné zakončení předmětu je potřeba **12** bodů.
- Každý váš výsledek musí být podložen postupem, nebo slovním popisem.
- Mezi dovolené pomůcky patří: psací potřeby a matematické nadšení.
- Je dobré dávat si pozor, kdy má výraz smysl.
- „*Matematik je slepý člověk v temné místnosti hledající černou kočku, která tam není.*“ — Charles Darwin

1. (3 body) Řešte soustavu rovnic s neznámými u, v a parametry $b, c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2u + bv = 0, \\ cu - v = 0. \end{cases}$$

2. (2 body) Řešte rovnici s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\log_3(5x - 4)}{\log_3(x - 1)} = 2.$$

3. (2 body) Řešte rovnici s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(4x) = 2 \cos(2x) - 1.$$

Nápověda: $\cos(2\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1$.

4. (2 body) V nedávné době řekl nejmenovaný politik v rozhovoru: „Jestliže půjde po volbách do vlády politická strana A, my, jakožto politická strana B, tam nepůjdeme“. Za předpokladu, že politik nikdy nelže, určete:

1. Jaké můžeme udělat závěry za předpokladu, že politická strana B bude v příštím vládním období v opozici?
2. Jaké můžeme udělat závěry za předpokladu, že se politická strana A stane po volbách součástí vlády?

5. (2 body) Určete maximální definiční obor funkce:

$$v(x) = \frac{1 + \ln x}{x \sqrt{1 - (\ln x)^2}}.$$

6. (3 body) Načrtněte graf funkce, určete maximální definiční obor a obor hodnot:

$$g(x) = ||x|^2 + 3|x| - 6|.$$

7. (1 bod) Nechť $z = -3 + i$. Vypočtěte:

$$(1 - 2i)z + (4 + i)\bar{z} - (2 + 6i).$$

8. (2 body) Komplexní číslo

$$z = \frac{1}{i - 1} + \frac{1}{1 + i}$$

vyjádřete:

- i) v exponenciálním tvaru,
- ii) v goniometrickém tvaru.

9. (3 body) Dokažte sporem, že $\sqrt{5}$ je iracionální.

10. **BONUS** (2 body) Uvažujme čtvercovou šachovnici se stranou o velikosti 2^n . Začerněme jedno z polí. Dokažte, že zbylá pole lze zcela pokrýt dlaždicemi složenými ze tří čtverečků ve tvaru L (tzv. trimin) tak, aby se nepřekrývaly.