

Datum: _____ Jméno: _____

Matematický proseminář: řešení závěrečného testu
--

- Čas na vypracování písemné práce je přibližně **60 minut**.
- Maximální počet bodů je **20**, pro úspěšné zakončení předmětu je potřeba **12** bodů.
- Každý váš výsledek musí být podložen postupem, nebo slovním popisem.
- Mezi dovolené pomůcky patří: psací potřeby a matematické nadšení.
- Je dobré dávat si pozor, kdy má výraz smysl.
- „*Matematik je slepý člověk v temné místnosti hledající černou kočku, která tam není.*“ — Charles Darwin

1. Řešte soustavy rovnic s neznámými u, v a parametry $b, c \in \mathbb{R}$:
(3 body)

a)

$$\begin{cases} bu + 3v = 1, \\ cu + 2v = 3. \end{cases}$$

Vynásobíme první rovnici číslem 2 a druhou číslem 3:

$$\begin{aligned} 2bu + 6v &= 2, \\ 3cu + 6v &= 9. \end{aligned}$$

Odečtením druhé rovnice od první dostaneme

$$(2b - 3c)u = -7.$$

- Je-li $2b - 3c \neq 0$, pak

$$u = \frac{-7}{2b - 3c}.$$

Dosadíme do $bu + 3v = 1$:

$$3v = 1 - bu = 1 - b \left(\frac{-7}{2b - 3c} \right) = 1 + \frac{7b}{2b - 3c} = \frac{2b - 3c + 7b}{2b - 3c} = \frac{9b - 3c}{2b - 3c},$$

tedy

$$v = \frac{9b - 3c}{3(2b - 3c)} = \frac{3b - c}{2b - 3c}.$$

- Je-li $2b - 3c = 0$, pak z rovnice $(2b - 3c)u = -7$ dostaneme spor $0 = -7$, soustava tedy nemá řešení.

b)

$$\begin{cases} 2u + bv = 0, \\ cu - v = 0. \end{cases}$$

Z druhé rovnice plyne

$$v = cu.$$

Dosadíme do první rovnice:

$$2u + b(cu) = 0 \implies (2 + bc)u = 0.$$

- Je-li $2 + bc \neq 0$ (tj. $bc \neq -2$), pak $u = 0$ a tedy $v = cu = 0$. Soustava má jediné řešení $(u, v) = (0, 0)$.
- Je-li $2 + bc = 0$ (tj. $bc = -2$), pak první rovnice je po dosazení splněna automaticky a zůstává podmínka $v = cu$. Soustava má nekonečně mnoho řešení

$$u = t, \quad v = ct, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Řešte rovnici s neznámou $x \in \mathbb{R}$
(2 body)

a) Podmínky: $2x - 1 > 0$ a $x - 2 > 0$, zároveň $\log_4(x - 2) \neq 0$, tedy

$$x > \frac{1}{2}, \quad x > 2, \quad x \neq 3 \implies x > 2, \quad x \neq 3.$$

Rovnici přepíšeme jako

$$\log_4(2x - 1) = 2 \log_4(x - 2) = \log_4((x - 2)^2).$$

Protože $\log_4$ je prostá, platí

$$2x - 1 = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4.$$

$$0 = x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5).$$

$$x \in \{1, 5\}.$$

Z podmínek vyhovuje pouze $x = 5$ (protože $x > 2$). Navíc $x \neq 3$ splněno.

$$\boxed{x = 5.}$$

b)

$$\frac{\log_3(5x - 4)}{\log_3(x - 1)} = 2.$$

Podmínky:

$$5x - 4 > 0 \implies x > \frac{4}{5}, \quad x - 1 > 0 \implies x > 1,$$

a zároveň

$$\log_3(x - 1) \neq 0 \implies x - 1 \neq 1 \implies x \neq 2.$$

Tedy $x > 1$, $x \neq 2$.

Řešení:

$$\log_3(5x - 4) = 2 \log_3(x - 1) = \log_3((x - 1)^2).$$

Protože $\log_3$ je prostá,

$$5x - 4 = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1.$$

$$0 = x^2 - 7x + 5.$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 20}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{29}}{2}.$$

Kontrola podmínek: Obě hodnoty jsou kladné, ale

$$\frac{7 - \sqrt{29}}{2} \approx 0.81 < 1$$

nevyhovuje podmínce $x > 1$. Druhá hodnota $\frac{7 + \sqrt{29}}{2}$ vyhovuje a zároveň není rovna 2.

$$\boxed{x = \frac{7 + \sqrt{29}}{2}}.$$

3. Řešte rovnici s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

a) Řešte rovnici

$$\sin(2x) = \cos(4x).$$

Použijeme vzorec $\cos(2\alpha) = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ pro $\alpha = 2x$:

$$\cos(4x) = 1 - 2 \sin^2(2x).$$

Rovnice tedy přejde na

$$\sin(2x) = 1 - 2 \sin^2(2x).$$

Proveďme substituci $u = \sin(2x)$. Dostaneme kvadratickou rovnici

$$u = 1 - 2u^2 \implies 2u^2 + u - 1 = 0.$$

$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \implies u = \frac{1}{2} \text{ nebo } u = -1.$$

Vrátíme substituci:

$$\sin(2x) = \frac{1}{2} \implies 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ nebo } 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$\sin(2x) = -1 \implies 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Po vydělení dvěma:

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi, \quad x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, \quad x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ nebo } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \text{ nebo } x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

b) Použijeme vzorec pro dvojnásobný úhel:

$$\cos(4x) = 2 \cos^2(2x) - 1.$$

Rovnice tedy přejde na

$$2 \cos^2(2x) - 1 = 2 \cos(2x) - 1.$$

Po odečtení -1 na obou stranách a vydělení 2 dostaneme

$$\cos^2(2x) = \cos(2x).$$

Proveďme substituci $u = \cos(2x)$. Pak

$$u^2 = u \implies u(u - 1) = 0,$$

tedy

$$u = 0 \quad \text{nebo} \quad u = 1.$$

Vrátíme substituci:

$$\begin{aligned} \cos(2x) = 0 &\implies 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \implies x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \\ \cos(2x) = 1 &\implies 2x = 2k\pi \implies x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{nebo} \quad x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

4. V nedávné době řekl nejmenovaný politik v rozhovoru: „Jestliže půjde po volbách do vlády politická strana A, my, jakožto politická strana B, tam nepůjdeme“. Za předpokladu, že politik nikdy nelže, určete:

1. Jaké můžeme udělat závěry za předpokladu, že politická strana B bude v příštím vládním období v opozici?
2. Jaké můžeme udělat závěry za předpokladu, že se politická strana A stane po volbách součástí vlády?
3. Jaké můžeme udělat závěry za předpokladu, že politická strana A bude v příštím volebním období v opozici?

Řešení:

1. Jestliže politická strana B bude v příštím vládním období v opozici, tedy nepůjde do vlády, tak můžeme vyvodit dva závěry:
 - (a) Politická strana A by se dostala do vlády a strana B by se k nim podle předchozích slov politika nepřidala.
 - (b) Politická strana A by ve vládě nefigurovala a strana B by se ani tak do vlády nedostala nebo se odmítla připojit k jiné opozici. O té situaci totiž politik nemluvil.
2. Za předpokladu, že se politická strana A stane součástí vlády, tak zůstane strana B v opozici.
3. Toto vyvození odpovídá situaci 1.

5. Určete maximální definiční obor funkce.

a)

$$\mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$$

b)

$$(e^{-1}; e)$$

6. Grafy lze nalézt zde: Geogebra.

7. a) Necht' $z = 1 - 2i$, potom $\bar{z} = 1 + 2i$.

$$(2 + i)z = (2 + i)(1 - 2i) = 2 - 4i + i - 2i^2 = 2 - 3i + 2 = 4 - 3i.$$

$$(1 - 3i)\bar{z} = (1 - 3i)(1 + 2i) = 1 + 2i - 3i - 6i^2 = 1 - i + 6 = 7 - i.$$

Celý výraz:

$$(2 + i)z + (1 - 3i)\bar{z} - (5 - i) = (4 - 3i) + (7 - i) - (5 - i) = 11 - 4i - 5 + i = 6 - 3i.$$

$$(2 + i)z + (1 - 3i)\bar{z} - (5 - i) = 6 - 3i.$$

b) Necht' $z = -3 + i$, potom $\bar{z} = -3 - i$.

$$(1 - 2i)z = (1 - 2i)(-3 + i) = -3 + i + 6i - 2i^2 = -3 + 7i + 2 = -1 + 7i.$$

$$(4 + i)\bar{z} = (4 + i)(-3 - i) = -12 - 4i - 3i - i^2 = -12 - 7i + 1 = -11 - 7i.$$

Celý výraz:

$$(1 - 2i)z + (4 + i)\bar{z} - (2 + 6i) = (-1 + 7i) + (-11 - 7i) - (2 + 6i) = -12 - (2 + 6i) = -14 - 6i.$$

$$(1 - 2i)z + (4 + i)\bar{z} - (2 + 6i) = -14 - 6i.$$

8. Komplexní číslo vyjádřete ve tvaru ...

Necht'

$$z = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{-1+i}.$$

Upravíme zlomky racionalizací jmenovatele:

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2}, \quad \frac{1}{-1+i} = \frac{-1-i}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-1-i}{2}.$$

Sečtením dostaneme

$$z = \frac{1-i}{2} + \frac{-1-i}{2} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

Goniometrický tvar.

$$z = -i = 1\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) \quad (\text{obecně } \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}).$$

Exponenciální tvar.

$$z = e^{i(\frac{3\pi}{2})}.$$

9. Důkazy.

a) **Důkaz (sporem), že $\sqrt{7}$ je iracionální.**

Předpokládejme spor, že $\sqrt{7}$ je racionální. Pak existují celá čísla $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, NSD(p, q) = 1$, taková, že

$$\sqrt{7} = \frac{p}{q}.$$

Umocněním dostaneme

$$7 = \frac{p^2}{q^2} \quad \implies \quad 7q^2 = p^2.$$

Z toho plyne, že $7 \mid p^2$, a tedy (protože 7 je prvočíslo) $7 \mid p$. Napišme $p = 7k$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$. Dosadíme:

$$7q^2 = (7k)^2 = 49k^2 \quad \implies \quad q^2 = 7k^2.$$

Tedy $7 \mid q^2$, a opět (jelikož 7 je prvočíslo) $7 \mid q$.

Dostali jsme, že 7 dělí p i q , což je spor s předpokladem $NSD(p, q) = 1$. Proto je $\sqrt{7}$ iracionální.

b) **Důkaz (sporem), že $\sqrt{5}$ je iracionální.**

Předpokládejme spor, že $\sqrt{5}$ je racionální. Pak existují celá čísla $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, NSD(p, q) = 1$, taková, že

$$\sqrt{5} = \frac{p}{q}.$$

Umocněním dostaneme

$$5 = \frac{p^2}{q^2} \quad \implies \quad 5q^2 = p^2.$$

Odtud plyne, že $5 \mid p^2$, a tedy (protože 5 je prvočíslo) $5 \mid p$. Napišme $p = 5k$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$. Dosadíme:

$$5q^2 = (5k)^2 = 25k^2 \quad \implies \quad q^2 = 5k^2.$$

Tedy $5 \mid q^2$, a opět (jelikož 5 je prvočíslo) $5 \mid q$.

Dostali jsme, že 5 dělí p i q , což je spor s předpokladem $NSD(p, q) = 1$. Proto je $\sqrt{5}$ iracionální.

10. **Tvrzení.** Necht' $n \in \mathbb{N}$. Uvažujme šachovnici $2^n \times 2^n$, na níž je jedno políčko začerněno (vynecháno). Pak lze všechna zbývajících políčka zcela pokrýt dlaždicemi ve tvaru L složenými ze tří jednotkových čtverců (tzv. triminy) tak, aby se dlaždice nepřekrývaly.

Důkaz (indukcí podle n).

Základ indukce: Pro $n = 1$ má šachovnice rozměr 2×2 . Po vynechání jednoho políčka zůstanou tři políčka, která tvoří právě jedno L -trimino, takže pokrytí existuje.

Indukční předpoklad: Předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké $n = k$, tj. každou šachovnici $2^k \times 2^k$ s jedním vynechaným políčkem lze pokrýt L -triminy bez překryvů.

Indukční krok: Uvažujme šachovnici $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ s jedním vynechaným políčkem. Rozdělíme ji na čtyři shodné kvadranty o rozměru $2^k \times 2^k$. Vynechané políčko leží právě v jednom z těchto kvadrantů.

V místě, kde se kvadranty stýkají, jsou čtyři středová políčka (po jednom v každém kvadrantu). Položíme jedno L -trimino tak, aby pokrylo tři z těchto čtyř středových políček, a to ta, která patří do tří kvadrantů *neobsahujících* původně vynechané políčko. Tím vznikne situace, že v každém z těchto tří kvadrantů zůstane právě jedno vynechané políčko (to čtvrté středové políčko), zatímco ve čtvrtém kvadrantu zůstává původní vynechané políčko.

Získali jsme tedy čtyři šachovnice $2^k \times 2^k$, z nichž každá má právě jedno vynechané políčko. Na každou z nich lze podle indukčního předpokladu použít pokrytí L -triminy. Spolu s jedním triminem položeným do středu tak pokryjeme celou šachovnici $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ mimo původně vynechané políčko, a dlaždice se nepřekrývají.

Tím je indukční krok dokázán, a tedy tvrzení platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

□