

Matematický proseminář: závěrečný test

- Čas na vypracování písemné práce je přibližně **60 minut**.
- Maximální počet bodů je **20**, pro úspěšné zakončení předmětu je potřeba **12** bodů.
- Každý váš výsledek musí být podložen postupem, nebo slovním popisem.
- Mezi dovolené pomůcky patří: psací potřeby a matematické nadšení.
- Je dobré dávat si pozor, kdy má výraz smysl.
- „*Matematik je slepý člověk v temné místnosti hledající černou kočku, která tam není.*“ — Charles Darwin

1. (3 body) Řešte soustavu rovnic s neznámými u, v a parametry $b, c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} bu + 3v = 1, \\ cu + 2v = 3. \end{cases}$$

2. (2 body) Řešte rovnici s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\log_4(2x-1)}{\log_4(x-2)} = 2.$$

3. (2 body) Řešte rovnici s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(2x) = \cos(4x).$$

Nápověda: $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2 \alpha$.

4. (2 body) V nedávné době řekl nejmenovaný politik v rozhovoru: „Jestliže půjde po volbách do vlády politická strana A, my, jakožto politická strana B, tam nepůjdeme“. Za předpokladu, že politik nikdy nelže, určete:

1. Jaké můžeme udělat závěry za předpokladu, že politická strana B bude v příštím vládním období v opozici?
2. Jaké můžeme udělat závěry za předpokladu, že se politická strana A stane po volbách součástí vlády?

5. (2 body) Určete maximální definiční obor funkce:

$$r(x) = \frac{1}{e^{2x} - e^x - 2}.$$

6. (3 body) Načrtněte graf funkce, určete maximální definiční obor a obor hodnot:

$$f(x) = \left| |x|^2 - 2|x| - 6 \right|.$$

7. (1 bod) Necht' $z = 1 - 2i$. Vypočtete:

$$(2+i)z + (1-3i)\bar{z} - (5-i).$$

8. (2 body) Komplexní číslo

$$z = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{-1+i}$$

vyjádřete:

- i) v exponenciálním tvaru,
- ii) v goniometrickém tvaru.

9. (3 body) Dokažte sporem, že $\sqrt{7}$ je iracionální.

10. **BONUS** (2 body) Uvažujme čtvercovou šachovnici se stranou o velikosti 2^n . Začerněme jedno z polí. Dokažte, že zbylá pole lze zcela pokrýt dlaždicemi složenými ze tří čtverečků ve tvaru L (tzv. trimin) tak, aby se nepřekrývaly.