

1 Příklady k parametrickým rovnicím a soustavám

1. Řešte rovnici s neznámou x a parametrem $p \in \mathbb{R}$:

$$p(2 - p)x = 4p.$$

2. Řešte rovnici s neznámou t a parametry $p, q \in \mathbb{R}$:

$$p^2t + q^2 = p^2 - q^2t.$$

3. Řešte rovnici s neznámou x a parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$\frac{2 + ax}{a + x} = 2a.$$

4. Řešte rovnici s neznámou y a parametrem $v \in \mathbb{R}$:

$$v\sqrt{y - v} = v^2.$$

5. Řešte rovnici s neznámou x a parametrem $c \in \mathbb{R}$:

$$\frac{x + c}{x} + \frac{x}{x + c} = \frac{c^2}{x(x + c)}.$$

6. Řešte soustavu rovnic s neznámými x, y a parametrem $p \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 5x - 4y = 10, \\ px - 8y = 2p. \end{cases}$$

7. Řešte soustavu rovnic s neznámými u, v a parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 3u - 2v = 2, \\ u - (a + 2)v = 1. \end{cases}$$

Příklady +:

- a) Řešte rovnici s neznámou z a parametrem $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$:

$$\frac{az^2 + (a - 1)z - 1}{a - 3} = 0.$$

- b) Řešte rovnici s neznámou x a parametrem $t \in \mathbb{R}$:

$$tx^2 + t^2x + t = 0.$$

Příklady byly vybrány z knihy *Matematika pro gymnázia - Rovnice a nerovnice*.

2 Řešení

1. Řešte rovnici $p(2-p)x = 4p$ s neznámou x a parametrem $p \in \mathbb{R}$.

Pokud koeficient $p(2-p)$ lineárního členu na levé straně rovnice je různý od nuly, tj. pokud $p \neq 0$ a $p \neq 2$, má daná rovnice právě jedno řešení, které vypočteme vydělením rovnice nenulovým číslem $p(2-p)$:

$$x = \frac{4p}{p(2-p)} = \frac{4}{2-p}.$$

Případy $p = 0$ a $p = 2$ musíme vyřešit zvlášť:

Je-li $p = 0$, jde o rovnici $0 \cdot x = 0$. Jejím řešením je každé reálné číslo.

Je-li $p = 2$, jde o rovnici $0 \cdot x = 8$, která nemá žádné řešení.

Získané výsledky přehledně shrneme do tabulky:

p	Množina řešení
$p = 0$	$\mathbb{R}$
$p = 2$	$\emptyset$
$p \notin \{0, 2\}$	$\left\{ \frac{4}{2-p} \right\}$

2. Řešte rovnici $p^2t + q^2 = p^2 - q^2t$ s neznámou t a parametry $p, q \in \mathbb{R}$.

Rovnici upravíme na tvar

$$(p^2 + q^2)t = p^2 - q^2.$$

Je-li $p = 0$ a zároveň $q = 0$, jde o rovnici $0 \cdot t = 0$. Řešením jsou všechna reálná čísla.

Je-li $p \neq 0$ nebo $q \neq 0$, je $p^2 + q^2 \neq 0$ a daná rovnice má jediné řešení

$$t = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}.$$

(p, q)	Množina řešení
$(p, q) = (0, 0)$	$\mathbb{R}$
$(p, q) \neq (0, 0)$	$\left\{ \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \right\}$

3. Řešíme obdobným způsobem, výsledné možnosti zapíšeme do tabulky.

a	Množina řešení
$a \in \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$	$\emptyset$
$a \notin \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$	$\left\{ \frac{2(1-a^2)}{a} \right\}$

4.

v	Množina řešení
$v = 0$	$\langle 0, +\infty \rangle$
$v < 0$	$\emptyset$
$v > 0$	$\{v^2 + v\}$

5. Daná rovnice nemá pro žádné $c \in \mathbb{R}$ řešení.

6.

p	Množina řešení
$p = 10$	$\left\{ \left(x, \frac{5}{4}x - \frac{5}{2} \right); x \in \mathbb{R} \right\}$
$p \neq 10$	$\{(2, 0)\}$

7.

a	Množina řešení
$a = -\frac{4}{3}$	$\emptyset$
$a \neq -\frac{4}{3}$	$\left\{ \left(\frac{2(a+1)}{3a+4}, -\frac{1}{3a+4} \right) \right\}$

Příklady +:

a) Výsledné možnosti zapíšeme do tabulky.

a	Množina řešení
$a \in \{-1, 0\}$	$\{-1\}$
$a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 3\}$	$\{\frac{1}{a}, -1\}$

b) Výsledné možnosti zapíšeme do tabulky.

t	Množina řešení
$t = 0$	$\mathbb{R}$
$t \in (-2, 0) \cup (0, 2)$	$\emptyset$
$t = -2$	$\{1\}$
$t = 2$	$\{-1\}$
$t \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$	$\left\{ \frac{-t + \sqrt{t^2 - 4}}{2}, \frac{-t - \sqrt{t^2 - 4}}{2} \right\}$

c) Řešení úlohy soustavy parametrických rovnic ze vzorového testu (který jsme psali na začátku semestru):

$$(1) \quad \begin{cases} px + y = 2p + 1, \\ x + py = 1 \end{cases} \implies x = 1 - py.$$

Dosadíme do první rovnice:

$$p(1 - py) + y = 2p + 1$$

$$p - p^2y + y = 2p + 1$$

$$y(1 - p^2) = p + 1.$$

a) $p = 1$

$$0 = 2 \implies \emptyset$$

b) $p = -1$

$$0 = 0 \implies \text{nekonečně mnoho řešení}$$

$$y \in \mathbb{R}, \quad x = 1 + y.$$

$$[1 + y, y]; y \in \mathbb{R}$$

c) $p \neq \pm 1$

$$y = \frac{1}{1 - p}, \quad x = 1 - p \cdot \frac{1}{1 - p} = \frac{1 - 2p}{1 - p}.$$

$$y = \frac{1}{1 - p} > 0 \implies 1 - p > 0 \implies p < 1.$$

$$x = \frac{1 - 2p}{1 - p} > 0 \implies 1 - 2p > 0 \implies p < \frac{1}{2}.$$

$$p \in (-\infty, -1) \cup (-1, \frac{1}{2})$$

Zapišme do tabulky.

p	K
1	$\emptyset$
-1	$\{ [1 + y, y[\mid y \in \mathbb{R} \}$
$\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$	$\left\{ \left[\frac{1 - 2p}{1 - p}, \frac{1}{1 - p} \right] \right\}$