

Je následující tvrzení vyřčené nejmenovaným politikem pravdivé?
„Platí presumpce nevin. Pro běžného občana je posvátná a nedotknutelná. U politika ale platí presumpce viny.“

1 Procházka historií

Aristoteles se ve 4. století př. n. l. procházel alejí olivovníků a přemýšlel nad rétorickými a filozofickými argumenty svých přátel. Zažil již mnoho diskuzí a občas mu slova přišla velmi přesvědčivá, avšak... něco mu nesesedlo. Jakoby některá tvrzení, která ten den slyšel, nebyla pravdivá. Hlavou mu určitě vířilo mnoho otázek, některé mohly znít třeba takto:

- „Jak najít spolehlivý způsob, který mě jednoznačně dovede k pravdivému poznání?“
- „Jak z obecně platných principů odvodit konkrétní závěry, a tím vytvořit pevné základy pro vědecké myšlení?“
- „Jak dát myšlení řád a jistotu, aby poznání nebylo založeno na názoru, ale na pravdivosti?“

Někteří z nás by možná dokázali odpovědět snadno, ale koncept *pravdy* způsobil závratě mnoha myslitelům napříč stoletími.

Aristoteles chtěl odlišit správné uvažování (dedukci) od pouhého zdání pravdy. Byl průkopníkem systematického zavedení formální logiky. Jeho důležitým přínosem je sylogistická¹ logika. Podívejme se na příklad:

Všichni lidé jsou smrtelní.

Sokrates je člověk.

→ Sokrates je smrtelný.

Aristoteles definoval rovněž základní pojmy logiky (výrok, predikát, kvantifikátor, kontradikce či implikace). Principy shrnul v souboru spisů zvaném *Organon* (= nástroj), který byl po staletí základem logického myšlení v Evropě. Logika se během středověku stala součástí *trivia*². V 17. století se na matematické scéně objevil Leibniz, který kromě diferenciálního počtu hledal „univerzální jazyk výpočtů“. Logika tedy zkoumá deduktivní postupy a způsoby uvažování, zda platí to, co bylo odvozeno.

V 19. a 20. století se matematickou logikou zabývali například Peano, Russell, Gödel, Tarski či Frege. Hledání cest, které by matematiku zbavily paradoxů a dopřály jí větší míru jistoty, vedlo k vyšší míře formalizace³. Symbolický jazyk nás při studiu matematiky může často velmi potrápít, ale je dobré si uvědomit, že v sobě nese hluboký význam.

¹Sylogismus je logický úsudek složený ze tří výroků: dvou premis (předpokladů) a závěru, který z nich logicky vyplývá.

²Ve středověku označovalo *trivium* (z latinského „trojcestí“) první, nižší stupeň sedmi svobodných umění, zaměřený na zvládnutí jazyka a logické argumentace. Skládalo se ze tří disciplín: gramatiky (převážně latinských), rétoriky (umění řečnit a psát) a dialektiky (logiky a filozofie).

³Formalizace: proces přechodu od intuitivního chápání k přesnému definování a odvozování pomocí logických pravidel a symbolického jazyka.

Výrok = tvrzení, o kterém má smysl rozhodnout, zda je pravdivé nebo nepravdivé.

K čemu mi bude logika?

Logika je základem přesného myšlení a strukturovaného rozhodování — proto je klíčová nejen ve filozofii, ale i v programování a umělé inteligenci. Učí nás pracovat s pravdivostními hodnotami („pravda“ či „nepravda“) a formálně popisovat podmínky, například pomocí Booleovských operací AND, OR, NOT. Ty se využívají při řízení programového toku, při návrhu digitálních obvodů i v umělé inteligenci.

ČÁST 1: Výroková logika – výroky, negace

Zadání

1. Rozhodněte o každé formulaci, zda je, či není výrokem.
 - (a) Hlavním městem České republiky je Brno.
 - (b) $3 < 5$.
 - (c) Pojdte dál!
 - (d) Necht' je x celé číslo.
 - (e) Klaun má červený nos.
 - (f) Každý klaun má červený nos.
2. Negujte následující výroky. Vyhněte se jazykovému obratu „Není pravda, že...“.
 - (a) Hlavním městem České republiky je Brno.
 - (b) $3 < 5$.
 - (c) Každý klaun má červený nos.
 - (d) Dnes je pondělí.

Řešení

1. **Rozhodněte, zda jde o výrok.**
 - (a) Je to (nepravdivý) výrok.
 - (b) Je to (pravdivý) výrok.
 - (c) Nejedná se o oznamovací větu, tedy nejde o výrok.
 - (d) Nejedná se o oznamovací větu, tedy nejde o výrok.
 - (e) Není dost konkrétní (není jasné, který klaun), tedy nejde o výrok.
 - (f) Je to výrok, ale bez dat neumíme rozhodnout pravdivost (kvantifikuje „každý“).
2. **Negujte následující výroky.**
 - (a) Hlavním městem České republiky není Brno./ Hlavním městem České republiky je jiná obec než Brno.

- (b) 3 není menší než 5. / 3 je větší nebo rovno 5. / $3 \geq 5$.
- (c) Existuje klaun, který nemá červený nos. / Alespoň jeden klaun má jinou barvu nosu než červenou.
- (d) Dnes není pondělí. / Dnes je jiný den než pondělí. / Dnes je úterý, středa, čtvrtek, pátek, sobota nebo neděle.

Poznámka: Negací (a) není výrok „Hlavním městem České republiky je Praha“, negací (b) není výrok $3 > 5$, negací (c) není výrok „Žádný klaun nemá červený nos“ a obdobně negací (d) není výrok typu „Dnes je středa.“

ČÁST 2: Složený výrok a pravdivostní tabulky

Zadání

- Určete pravdivost následujících výroků.
 - $5 > 3 \wedge 5 < 3$.
 - $5 > 3 \vee 5 < 3$.
 - $3 > 5 \implies 3 \mid 6$.
 - $2 \cdot 3 = 5 \Leftrightarrow 3 \cdot 2 = 5$.
- Výroky z předchozího cvičení negujte.
- Nechť p a q jsou výroky. Sestavte pravdivostní tabulku pro následující formule a určete, zda se jedná o tautologii:
 - $p \vee \neg p$ (princip vyloučeného třetího),
 - $(p \wedge q) \implies p$.
- Nechť p a q jsou výroky. Rozhodněte pomocí pravdivostní tabulky, zda jsou následující dvě formule logicky ekvivalentní:

$$p \implies q \quad \text{a} \quad \neg q \implies \neg p.$$

- Určete pravdivost následujících složených výroků.

- $\exists n \in \mathbb{N} : 2 \mid n \wedge n < 5$.
- $\exists n \in \mathbb{N} : 2 \mid n \wedge n \mid 15$.
- $\forall x \in \mathbb{Z} : |x| < 0 \vee x^2 < 0$.
- $\forall x \in \mathbb{Z} : |x| = x \vee |x| = -x$.
- $\forall n \in \mathbb{N} : n < 5 \implies 2n < 7$.
- $\forall n \in \mathbb{N} : 2 \mid n \implies n + 1 \geq 3$.
- $\forall q \in \mathbb{R} : 2q < \frac{3}{4} \Leftrightarrow q < \frac{3}{8}$.
- $\forall q \in \mathbb{R} : q > 3 \Leftrightarrow q^2 > 9$.

- Výroky z předchozího cvičení negujte.

7. Rozhodněte, zda je podmínka $6 \mid n$ postačující, nebo nutná pro podmínku $3 \mid n$. Uvažujme větu

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad 6 \mid n \implies 3 \mid n.$$

- (a) Která z podmínek $6 \mid n$ a $3 \mid n$ je postačující a která nutná?
 (b) Je podmínka $3 \mid n$ také postačující pro $6 \mid n$? Svou odpověď doložte konkrétním číslem.

Poznámka: Zápis $m \mid n$ říká, že přirozené číslo m dělí přirozené číslo n , neboli číslo n je dělitelné číslem m .

Řešení

1. Určete pravdivost.

- (a) $5 > 3 \wedge 5 < 3$ — *nepravdivý*
 (b) $5 > 3 \vee 5 < 3$ — *pravdivý*
 (c) $3 > 5 \rightarrow 3 \mid 6$ — *pravdivý* ($3 > 5$ není pravdivý výrok, pravdivost druhého výroku je tedy nepodstatná).
 (d) $2 \cdot 3 = 5 \Leftrightarrow 3 \cdot 2 = 5$ — *pravdivý* (ekvivalence dvou nepravdivých výroků).

2. Negace předchozích výroků.

- (a) $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$, tedy $5 \leq 3 \vee 5 \geq 3$.
 (b) $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$, tedy $5 \leq 3 \wedge 5 \geq 3$.
 (c) $\neg(A \rightarrow B) \equiv A \wedge (\neg B)$, tedy $(3 > 5) \wedge (3 \nmid 6)$.
 (d) $\neg(A \Leftrightarrow B) \equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$. Zde $(2 \cdot 3 = 5 \wedge 3 \cdot 2 \neq 5) \vee (2 \cdot 3 \neq 5 \wedge 3 \cdot 2 = 5)$.

3.

p	q	$p \vee \neg p$	$(p \wedge q) \implies p$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	1	1

Obě formule jsou tautologie.

4.

p	q	$p \implies q$	$\neg q \implies \neg p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Formule jsou logicky ekvivalentní.

5. Určete pravdivost.

- (a) $\exists n \in \mathbb{N} : 2 \mid n \wedge n < 5$ — *pravdivý* (např. $n = 2$).
 (b) $\exists n \in \mathbb{N} : 2 \mid n \wedge n \mid 15$ — *nepravdivý* (dělitele 15 jsou 1, 3, 5, 15).
 (c) $\forall x \in \mathbb{Z} : |x| < 0 \vee x^2 < 0$ — *nepravdivý* (ani $|x| < 0$, ani $x^2 < 0$ nikdy neplatí).

- (d) $\forall x \in \mathbb{Z} : |x| = x \vee |x| = -x$ — *pravdivý* (kladné i záporné x).
- (e) $\forall n \in \mathbb{N} : n < 5 \rightarrow 2n < 7$ — *nepravdivý* (pro $n = 4$ je $8 \not< 7$).
- (f) $\forall n \in \mathbb{N} : 2 \mid n \rightarrow n + 1 \geq 3$ — *pravdivý* (U implikace je rozhodující, zda za předpokladu pravdivého prvního dílčího výroku je pravdivý i druhý dílčí výrok, či nikoliv. Zkoumáme tedy platnost druhého dílčího výroku pro $n \in \{2, 4, 6, 8, \dots\}$. Druhý dílčí výrok lze upravit do tvaru $n \geq 2$. Tuto podmínku však všechna uvažovaná sudá čísla splňují, a tedy je daný výrok pravdivý).
- (g) $\forall q \in \mathbb{R} : 2q < \frac{3}{4} \Leftrightarrow q < \frac{3}{8}$ — *pravdivý* (ekvivalentní nerovnosti).
- (h) $\forall q \in \mathbb{R} : q > 3 \Leftrightarrow q^2 > 9$ — *nepravdivý* (Pravdivost ekvivalence můžeme ověřit prozkoumáním pravdivosti implikací oběma směry. Nejprve uvažujme implikaci zleva doprava. Pokud q splňuje podmínku $q > 3$, pak platí, že $q^2 > 9$. V případě implikace zprava doleva však nejprve předpokládáme, že $q^2 > 9$, z čehož plyne, že q může nabývat libovolné hodnoty z intervalů $(-\infty; -3)$ a $(3; \infty)$, neboli implikace zprava doleva neplatí (např. pro $q = -5$), a tedy i neplatí daný výrok.).

6. Negace těchto výroků.

- (a) $\forall n \in \mathbb{N} : 2 \nmid n \vee n \geq 5$.
- (b) $\forall n \in \mathbb{N} : 2 \nmid n \vee n \nmid 15$.
- (c) $\exists x \in \mathbb{Z} : |x| \geq 0 \wedge x^2 \geq 0$.
- (d) $\exists x \in \mathbb{Z} : |x| \neq x \wedge |x| \neq -x$.
- (e) $\exists n \in \mathbb{N} : n < 5 \wedge 2n \geq 7$.
- (f) $\exists n \in \mathbb{N} : 2 \mid n \wedge n + 1 < 3$.
- (g) $\exists q \in \mathbb{R} : (2q < \frac{3}{4} \wedge q \geq \frac{3}{8}) \vee (2q \geq \frac{3}{4} \wedge q < \frac{3}{8})$.
- (h) $\exists q \in \mathbb{R} : (q > 3 \wedge q^2 \leq 9) \vee (q \leq 3 \wedge q^2 > 9)$.
7. (a) $6 \mid n$ je postačující podmínka pro $3 \mid n$; $3 \mid n$ je nutná podmínka pro $6 \mid n$.
- (b) Ne. Například $n = 3$ (nebo 9, 15, ...): $3 \mid 3$, ale $6 \nmid 3$.

ČÁST 3: Predikátová logika – vlastnosti, kvantifikátory a jejich negace

Zadání

1. Formulujte následující výroky slovy, negujte je a rozhodněte o jejich pravdivosti, resp. o pravdivosti jejich negace.

- (a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x \cdot y = 5$.
- (b) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x \cdot y = 5$.
- (c) $(\exists x \in \mathbb{Z}) : |x| = -x$.

2. Programující studenti

Nechť

$S(x) : x$ je student

a

$P(x) : x$ umí programovat v jazyce Python.

Převeďte do symbolického zápisu:

- (a) Každý student umí programovat v jazyce Python.
- (b) Některý student umí programovat v jazyce Python.
- (c) Některý student neumí programovat v jazyce Python.

Řešení

1. Formulujte následující výroky slovy, negujte je a rozhodněte o jejich pravdivosti, resp. o pravdivosti jejich negace.

- (a) Slovy: „Ke každému reálnému x existuje reálné y takové, že $x \cdot y$ je rovno 5.“ Výrok není pravdivý, neboť pro $x = 0$ nebude rovnost splněna.
Negace: $(\exists x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) : x \cdot y \neq 5$. Slovy: „Existuje reálné x takové, že pro každé y je $x \cdot y$ různé od 5.“ Toto tvrzení pravdivé je, stačí, aby existovalo takové x jedno jediné – je jím 0.
- (b) „Existuje reálné x takové, že pro každé y je $x \cdot y$ rovno 5.“ Výrok není pravdivý, protože pokud by takové x existovalo, muselo by se rovnat $\frac{5}{y}$, avšak výraz $\frac{5}{y}$ není pro měnící se y konstantní. Ještě lépe lze pravdivost nahlédnout z pravdivosti negace.
Negace: $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) : x \cdot y \neq 5$. Slovy: „Ke každému reálnému x existuje reálné y takové, že $x \cdot y$ je různé od 5.“ Toto tvrzení je pravdivé, neboť ke každému číslu x snadno nalezneme alespoň jedno (zřejmě i více) čísel y takových, aby součin $x \cdot y$ byl různý od 5.
- (c) „Existuje celé číslo x takové, že jeho absolutní hodnota je rovna číslu k němu opačnému.“ Výrok je pravdivý. K prokázání pravdivosti stačí nalézt alespoň jedno takové číslo, je jím např. $x = -2$.
Negace: $\forall x \in \mathbb{Z} : |x| \neq -x$. Slovy: „Pro každé celé číslo x platí, že jeho absolutní hodnota je různá od čísla opačného k x .“ Tento výrok pravdivý není, neboť (jak již z výše uvedeného víme) např. pro $x = -2$ rovnost platí.

2. Python

Zpětný převod:

- (a)
$$(\forall x) (S(x) \implies P(x)).$$
- (b)
$$(\exists x) (S(x) \wedge P(x)).$$
- (c)
$$(\exists x) (S(x) \wedge \neg P(x)).$$

ČÁST 4: Logické spojky v matematických větách

Zadání

1. Najděte logické spojky a kvantifikátory ve větách z lineární algebry.

- (a) Množina $\mathbb{Z}_n$ se sčítáním a násobením modulo n je komutativním tělesem právě tehdy, když je n prvočíslo.

- (b) Charakteristika tělesa je buď nula, nebo prvočíslo.
- (c) Množina $R^{n \times n}$ všech čtvercových matic řádu n nad komutativním okruhem R tvoří spolu s operacemi sčítání a násobení okruh. Má-li okruh R jednotkový prvek, má i okruh $R^{n \times n}$ jednotkový prvek.
- (d) Každou permutaci je možno složit z transpozic.
- (e) Jestliže má permutace $P \in S_n$ právě k cyklů, je $\text{sgn } P = (-1)^{n-k}$.
- (f) Každý podprostor vektorového prostoru je jeho direktním sčítancem.

Řešení

1. (a) „Právě tehdy, když“ vyjadřuje ekvivalenci.
- (b) „Bud – nebo“ vyjadřuje disjunkci.
- (c) „Má-li ... , má i ...“ vyjadřuje implikaci.
- (d) „Každou“ odpovídá obecnému kvantifikátoru.
- (e) „Jestliže ... , ...“ vyjadřuje implikaci.
- (f) „Každý“ odpovídá obecnému kvantifikátoru.

ČÁST 5: Analýza logiky v SQL dotazu

Zadání

Pro zadaný SQL dotaz proveďte jeho logickou a sémantickou analýzu.

```
SELECT jmeno, rocnik
FROM Student
WHERE vek >= 18 AND (rocnik = 1 OR rocnik = 2);
```

1. Identifikujte v podmínce WHERE:
 - logické spojky,
 - relační operátory,
 - porovnávané hodnoty (konstanty).
2. Zaveďte následující predikáty:

$V(x)$: student x je starší nebo roven 18 letům,

$R_1(x)$: student x je v 1. ročníku,

$R_2(x)$: student x je ve 2. ročníku.

Zapište podmínku z klauzule WHERE pomocí těchto predikátů v predikátové logice.

3. Slovně popište množinu studentů, kterou tento dotaz vybere.
4. Vysvětlete, proč jsou závorky v části

$(\text{rocnik} = 1 \text{ OR rocnik} = 2)$

důležité pro jednoznačnou interpretaci podmínky.

Řešení

1. Identifikujte v podmínce **WHERE**

- logické spojky: **AND**, **OR**,
- relační operátory: $\geq$, $=$ (dvakrát),
- konstanty: 18, 1, 2.

2. Zapište podmínku z klauzule **WHERE** pomocí těchto predikátů v predikátové logice.

$$V(x) \wedge (R_1(x) \vee R_2(x))$$

3. *Správně jsou například:* Dotaz vybere jména a ročníky všech studentů, kterým je alespoň 18 let a kteří jsou v 1. nebo 2. ročníku. / Vybere plnoleté studenty prvního a druhého ročníku.

4. Operátor **AND** má vyšší prioritu než **OR**. Bez závorek by se podmínka **vek $\geq$ 18 AND rocnik = 1 OR rocnik = 2** vyhodnotila jako

$$(V(x) \wedge R_1(x)) \vee R_2(x),$$

tedy plnoletí studenti 1. ročníku a navíc **všichni** studenti 2. ročníku, včetně nezletilých. Závorky zajistí, že podmínka na věk platí pro oba ročníky.

ČÁST 6: Výrokové formule, negace a ekvivalentní implikace

Zadání

1. Kdy je formule $(A \vee B) \implies (A \implies B)$ nepravdivá?
2. Výrokovou formuli $(A \vee B) \implies (A \implies B)$ negujte a zapište co nejjednodušší formuli ekvivalentní s touto negací takovou, že obsahuje jen A , B , jejich negace a spojku $\wedge$.
3. Zapište

- (a) obrácenou,
- (b) obměněnou

implikaci k $(A \vee B) \implies (A \implies B)$. V jakém vzájemném vztahu jsou implikace a její obměna?

4. Necht f je funkce. Definice prosté funkce je dána podmínkou

$$(\forall x_1, x_2 \in D) : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

- (a) Zapište obměněnou implikaci této definice.
- (b) Rozhodněte, zda jsou původní a obměněná formulace logicky ekvivalentní.

Řešení

1. Kdy je formule $(A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ nepravdivá?

Řešení: Formule má podobu implikace. Implikace je nepravdivá pouze tehdy, když je pravdivá její první část a zároveň nepravdivá část druhá. První část, tj. formule $A \vee B$ je pravdivá, je-li alespoň jedna z proměnných A, B pravdivá. Druhá část, tj. formule $A \Rightarrow B$ je nepravdivá pouze tehdy, když je $p(A) = 1$ a $p(B) = 0$. V tomto případě je první část pravdivá, což jsme chtěli. Daná formule je nepravdivá pouze tehdy, když A je pravdivé a B nepravdivé.

2. Výrokovou formuli $(A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ negujte a zapište co nejjednodušší formuli ekvivalentní s touto negací takovou, že obsahuje jen (ne nutně oba) dané dílčí výroky A, B , jejich negace a spojku $\wedge$.

Řešení: Formule má podobu implikace. Negací implikace je konjunkce první části a negace druhé části, tedy $(A \vee B) \wedge (A \wedge \neg B)$. Formule s touto formulí ekvivalentní je např. $A \wedge \neg B$, což lze ověřit úvahou nebo tabulkou pravdivostních hodnot.

3. Zapište

- a) obrácenou,
- b) obměněnou

implikaci k $(A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$. V jakém vzájemném vztahu jsou implikace a její obměna?

Řešení:

- (a) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \vee B)$.
- (b) $\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(A \vee B)$, neboli $(A \wedge \neg B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$.

4. (a) Obměněná implikace:

$$(\forall x_1, x_2 \in D) : \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

- (b) Ano. Původní implikace a její obměna jsou logicky ekvivalentní. Obě vyjadřují prostotu (injektivitu) funkce.

Tento tvar vyjadřuje, že *různé argumenty mají různé hodnoty funkce*. Obě formulace popisují stejný vztah, pouze z opačné logické perspektivy.

Je dobré si uvědomit, že na obě definice můžeme v materiálech narazit, viz Portál SŠ matematiky - funkce, Injektivní funkce.