

Goniometrické funkce - taháček

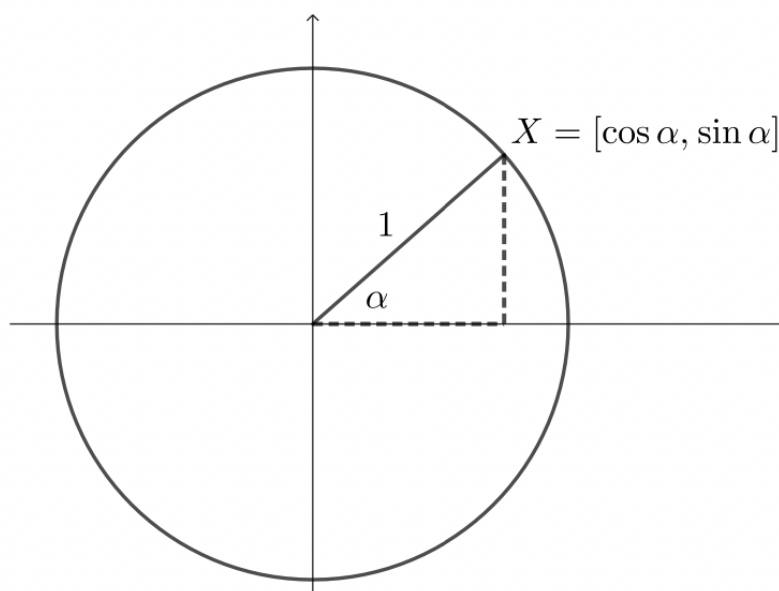
1. Jak převádíme velikosti úhlů v míře stupňové (v úhlových stupních) na míru obloukovou (v radiánech)?

Odpověď: Vycházíme z toho, že velikosti úhlu 360° přísluší v obloukové míře (v radiánech) velikost 2π :

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad.}$$

2. Definujme sinus a cosinus v jednotkové kružnici. Pro dané α definujeme $\sin \alpha$ jako y-ovou souřadnici průsečíku X příslušného průvodiče s jednotkovou kružnicí. Podobně definujeme $\cos \alpha$ jako x-ovou souřadnici průsečíku X .



3. Definujme funkce tangens a kotangens.

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

4. Podívejme se na tabulkové hodnoty.

Úhel α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

Tabulka 1: Hodnoty $\sin \alpha$ a $\cos \alpha$ pro vybrané úhly.

Úhel α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	<i>undefined</i>	0	<i>undefined</i>	0
$\operatorname{cotg} \alpha$	<i>undefined</i>	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	<i>undefined</i>	0	<i>undefined</i>

Tabulka 2: Hodnoty $\operatorname{tg} \alpha$ a $\operatorname{cotg} \alpha$ pro vybrané úhly.

5. Pár užitečných vzorečků se vždy hodí.

(a) $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$

(b) $\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$

(c) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$

(d) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$

(e) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$

(f) $\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}, \quad \sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}.$

(g) $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$

(h) $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$

(i) $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha.$

(j)

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad \sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

6. Univerzální substituce

$$\cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2t}{1 - t^2}, \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1 - t^2}{2t}.$$

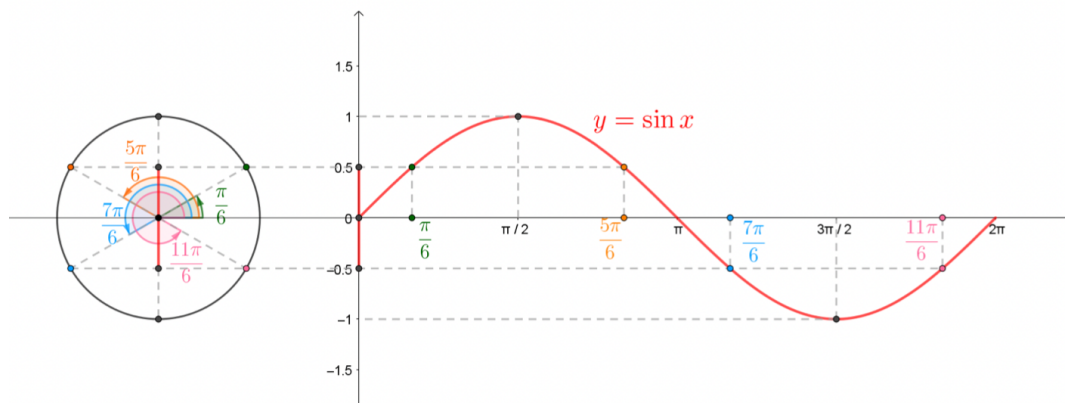
Odvození všech vzorců zmíněných výše včetně univerzálních substitucí lze nalézt na stránkách Matematického prosemináře Odvození základních vztahů.

Obrázky **funkcí**, které zkrášlují následující stránky, byly převzaty ze stránek Matematického prosemináře, další shrnutí typů funkcí lze nalézt na Funkce – přehled vlastností a grafů elementárních funkcí.

Pro další zkoumání goniometrie doporučuji diplomovou práci Marie Motyčkové Goniometrie a trigonometrie.

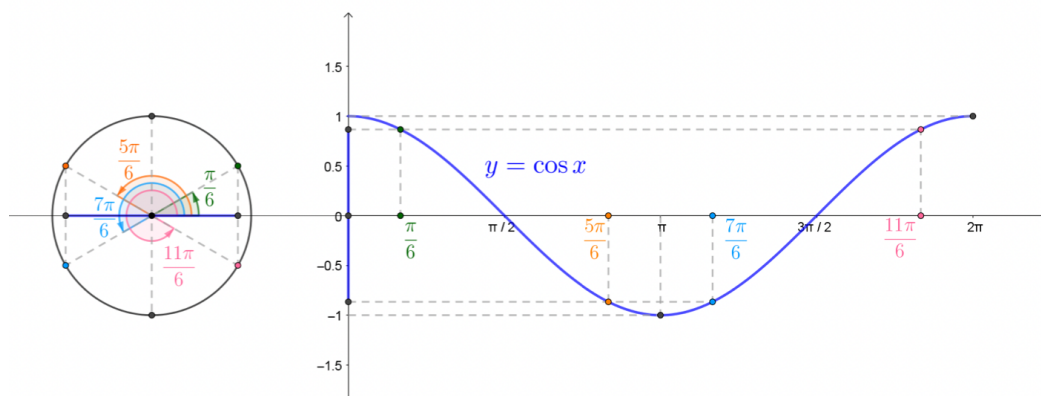
$$f: y = \sin x; D_f = \mathbb{R}, H_f = \langle -1; 1 \rangle$$

- rostoucí v $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, klesající v $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$
- lichá
- je omezená (omezená shora i zdola)
- nejmenší perioda 2π
- není prostá
- má min v každém bodě $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, má max v každém bodě $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$



$$f: y = \cos x; D_f = \mathbb{R}, H_f = \langle -1; 1 \rangle$$

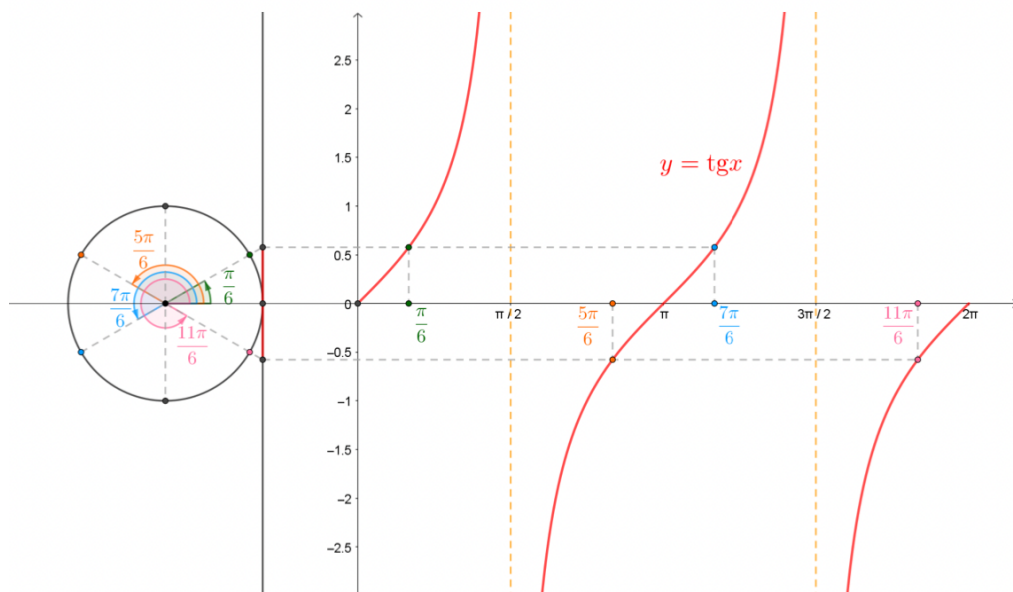
- rostoucí v $\langle \pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi \rangle$, klesající v $\langle 2k\pi; \pi + 2k\pi \rangle$
- sudá
- je omezená (omezená shora i zdola)
- nejmenší perioda 2π
- není prostá
- má min v každém bodě $\pi + 2k\pi$, má max v každém bodě $2k\pi$



Různé typy funkcí nalezneme zde: [Geogebra](#).

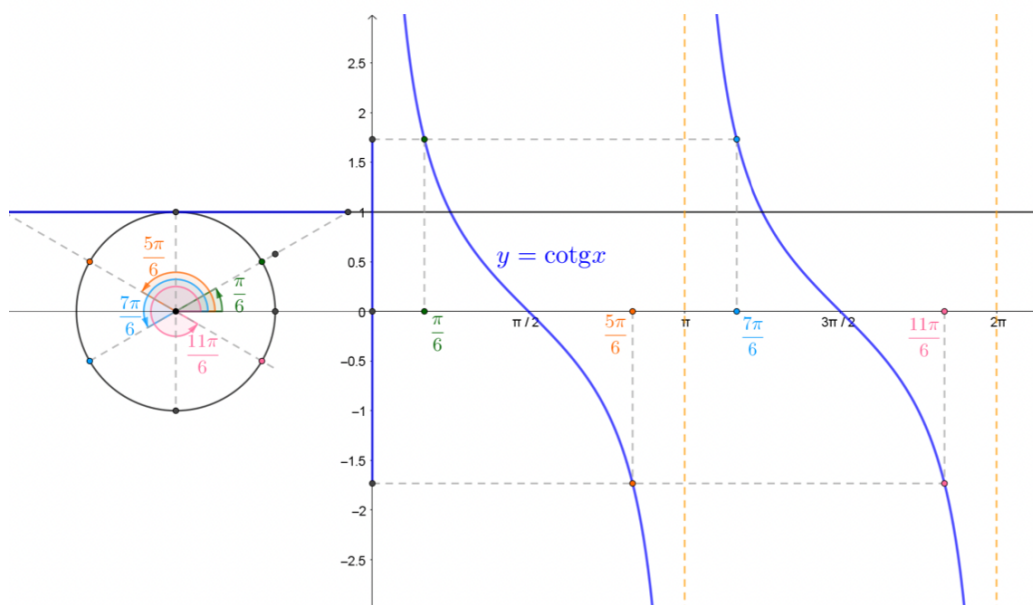
$$f: y = \operatorname{tg} x; D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right), H_f = \mathbb{R}$$

- rostoucí v $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$
- lichá
- není ani shora, ani zdola omezená
- nejmenší perioda π
- není prostá
- nemá min, nemá max



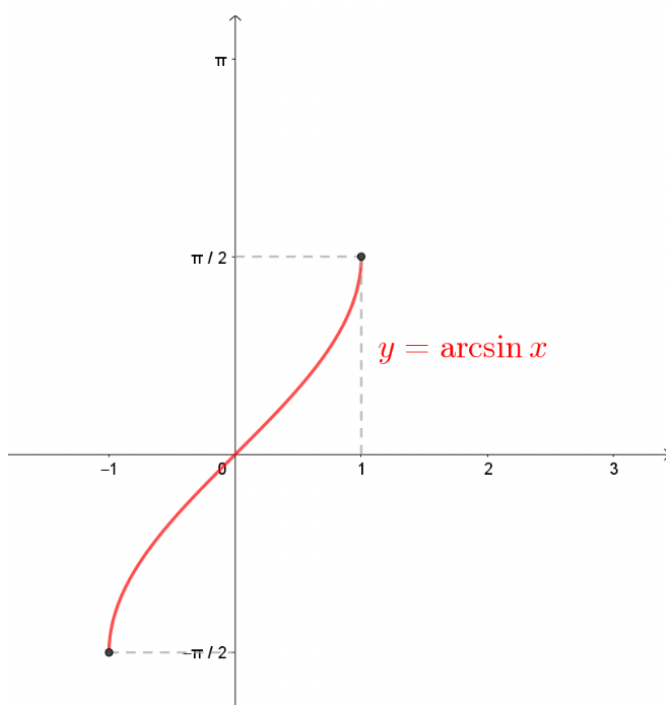
$$f: y = \cot g x; D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi; \pi + k\pi), H_f = \mathbb{R}$$

- klesající v $(k\pi; \pi + k\pi)$
- lichá
- není ani shora, ani zdola omezená
- nejmenší perioda π
- není prostá
- nemá min, nemá max



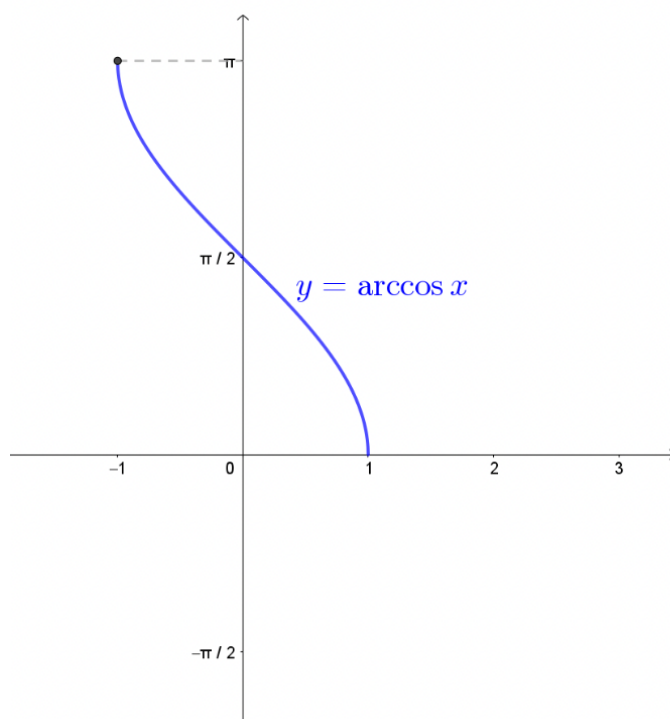
$$y = \arcsin x; D_f = \langle -1; 1 \rangle, H_f = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

- rostoucí
- lichá
- je omezená (omezená shora i zdola)
- prostá
- má min v bodě -1 , má max v bodě 1



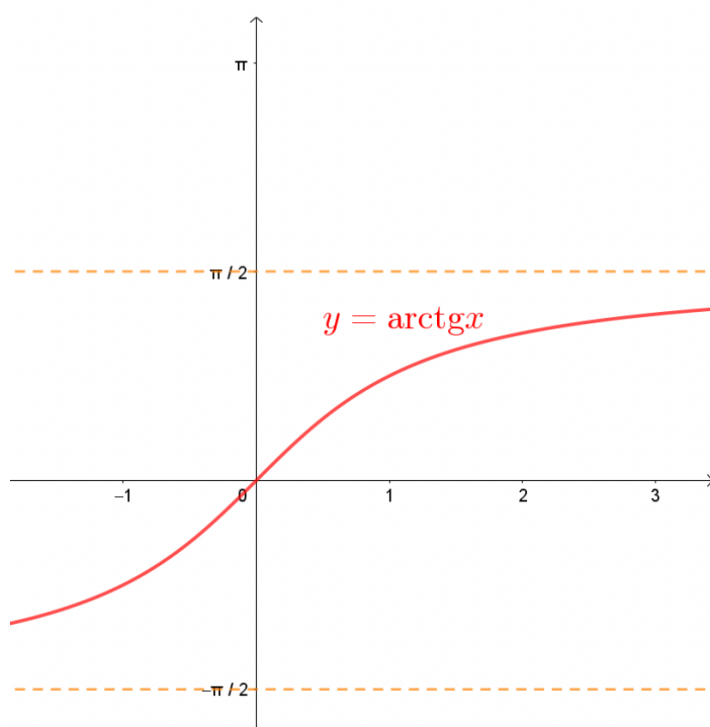
$$y = \arccos x; D_f = \langle -1; 1 \rangle, H_f = \langle 0; \pi \rangle$$

- klesající
- ani sudá, ani lichá
- je omezená (omezená shora i zdola)
- prostá
- má min v bodě 1, má max v bodě -1



$$y = \operatorname{arctg} x, ; D_f = \mathbb{R}, H_f = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

- rostoucí
- lichá
- je omezená (omezená shora i zdola)
- prostá
- nemá min, nemá max



$$y = \operatorname{arccotg} x, ; D_f = \mathbb{R}, H_f = (0; \pi)$$

- klesající
- ani sudá, ani lichá
- je omezená (omezená shora i zdola)
- prostá
- nemá min, nemá max

