

Kratší výlet do historie

Chceme-li se dnes dopracovat k pojmu *funkce*, zavádíme si *kartézský součin*, podmnožinu *kartézského součinu* aneb *relaci* a následně *zobrazení*, přičemž už víme, že v různých odvětvích matematiky se často pojmy *funkce* a *zobrazení* nerozlišují^a.

Daná představa je ovšem poměrně nová.

Měli bychom z ní mít radost?

Když Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz v druhé polovině 17. století vyvinuli diferenciální počet, matematici napříč Evropou začali zkoumat různé typy problémů. Například zkoumali trajektorie křivek (brachistochrony, traktrix či řetězovky). Při řešení těchto problémů Jean Bernoulli v roce 1718 zapsal jednu z raných formálních definic pojmu funkce, ovšem zde příběh zdaleka nekončí.

V 18. století se napříč Evropou rozvěvela světélka rozumu a kladl se důraz na poznání, dnes hovoříme o době osvícenství. Mezi hlavní světloonoše patřili pánové Diderot a D'Alembert, autoři *Encyklopedie*. Zatímco Diderot působil jako hlavní síla, která shromažďovala spisovatele a přehala před mnoha zákazy zpátečnických institucí, D'Alembert měl na starost právě matematické kapitoly encyklopedie. Matematika byla rozdělena do dvou částí a to *čistá* matematika a *smíšená* (mechanika, optika apod.). Pojem funkce se v sekci algebry objevil v roce 1757, v sekci analýzy v roce 1785 (větev analýzy vzniká později až díky diferenciálnímu počtu)^b. Pro srovnání je dobré zmínit, že limita, koncept, který je v dnešní době považován spíše za vysokoškolské učivo na rozdíl od funkcí, našla místo v encyklopedii již v roce 1754, funkci tedy o pár let předběhla.

I Euler v průběhu svého života změnil pohled na funkce. Nejdříve je považoval za algebraický výraz (1748), aby ovšem mohl zahrnout třeba i nespojitě funkce, začal nad funkcí přemítat jako nad *vztahem* mezi proměnnými kvantitami (1755). Funkce byly rovněž vnímány jako řady, do kterých je lze rozvinout, dnes ovšem víme, že tak nelze činit u všech typů funkcí.

Vztah (relation, relace) je už celkem blízko našemu dnešnímu pojetí funkce, ale když se ohlédneme trochu zpět, zjistíme, že to vůbec nebyla triviální záležitost, a proto bychom z úvodní představy skutečně mohli mít radost, neboť už dnes víme, co to funkce vlastně je. Také bychom se neměli příliš trápit, jestliže nám v matematice není něco hned jasné, neboť dumání je součástí procesu, vždyť i Eulerovi to zabralo pár let.

^aFunkce je druh zobrazení, které každému prvku z definičního oboru přiřadí právě jeden prvek z oboru hodnot.

^bKonkrétní data se liší podle vydání/oddílu: hlavní svazky *Encyclopédie* vycházely 1751–1772, později následovaly dodatky a tematické *méthodiques*.

1. Účinnost chlazení

Motivace. U chlazení elektroniky teplo odvedené prouděním vzduchu je přímo úměrné druhé odmocnině rychlosti proudění $v^{1/2}$. Zároveň *příkon ventilátoru* lze pro jednoduchý model psát polynomem $a + bv + cv^2$ v proměnné v .

Definujme „účinnost“ chlazení na jednotku příkonu:

$$\eta(v) = \frac{k\sqrt{v}}{a + bv + cv^2}, \quad v \geq 0, \quad k > 0, \quad a, b, c > 0,$$

přičemž jednotky jsou: $k \left(J \cdot \sqrt{\frac{s}{m}}\right)$, $a \left(J\right)$, $b \left(J \cdot \frac{s}{m}\right)$, $c \left(J \cdot \frac{s^2}{m^2}\right)$.

Z našeho měření vyplynuly následující hodnoty koeficientů: $k = 1$, $a = 20$, $b = 3$, $c = 0.2$:

$$\boxed{\eta(v) = \frac{\sqrt{v}}{20 + 3v + 0.2v^2}}, \quad v \geq 0.$$

Neboť se jedná čistě o matematický model, nemusíme se trápit jednotkami.

(a) **Základní práce s předpisem**

- i. Určete (maximální) definiční obor $D(\eta)$ a obor hodnot $H(\eta)$.
- ii. Vypočítejte $\eta(0)$, $\eta(1)$, $\eta(4)$ a $\eta(9)$.

(b) **Vlastnosti a chování funkce**

- i. Rozhodněte, je-li η na $(0, \infty)$ klesající/rostoucí v okolí ∞ . Odpověď zdůvodněte limitou. Co nám limita říká o reálném světě (tj. vyplácí se parametry hnát do krajnosti)?
- ii. Najděte průsečíky grafu $y = \eta(v)$ s osami souřadnic (pokud existují).

2. Pružina s pojistkou

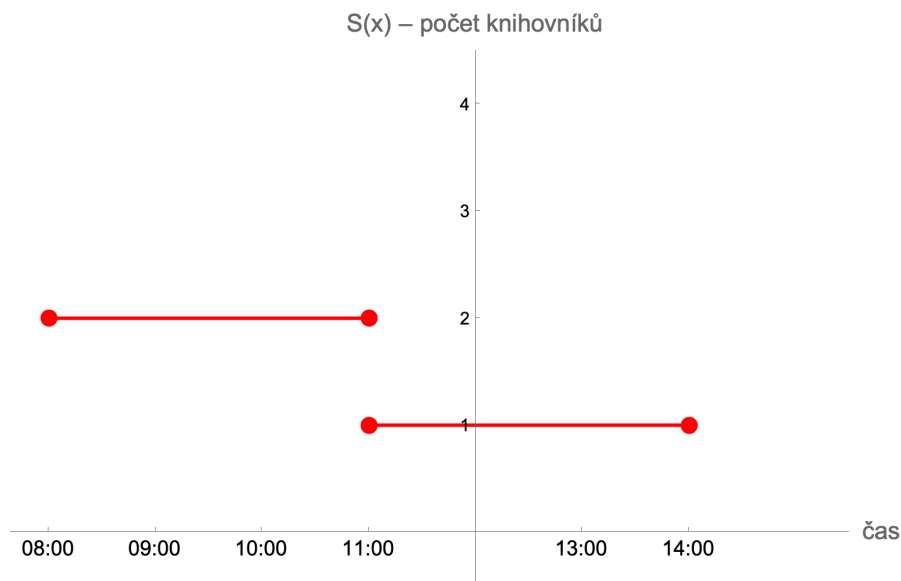
Motivace. Uvažujme *torzní pružinu* (pružinu, která klade odpor proti natočení o úhel θ) s integrovanou *pojistkou*. Pojistka funguje jako třecí spojka nebo mechanický doraz, který nedovolí, aby krouticí moment překročil bezpečnou krajní mez $\pm 4 \text{ N} \cdot \text{m}$. Torzní pružinu můžeme nalézt např. u objektů: panty notebooků, víčka spotřebičů, poklopy, garážová vrata (torzní hřídele), kapoty a kufry aut, torzní pružina v budících či metronomech, klasická past na myši, natahovací (wind-up) hračky.

Předpokládejme, že pro malé úhly platí přibližně $T(\theta) \approx \theta$. S pojistkou (krajní mez $\pm 4 \text{ N} \cdot \text{m}$) pak platí předpis:

$$T(\theta) = \begin{cases} -4, & \theta \leq -4, \\ \theta, & -4 < \theta < 4, \\ 4, & \theta \geq 4. \end{cases}$$

Načrtněte graf. Jedná se o funkci? Jestliže ano, vyřešte následující úkoly.

- (a) Určete (maximální) definiční obor $D(T)$ a obor hodnot $H(T)$.
- (b) Rozhodněte, zda je T lichá či sudá. Odpověď zdůvodněte.
- (c) Na kterém intervalu je T rostoucí/klesající? Kde už není rostoucí/klesající? Odpověď zdůvodněte.
- (d) Určete průsečíky grafu $y = T(\theta)$ s osami souřadnic.
- (e) (Volitelně) Vysvětlete fyzikální význam grafu.



Obrázek 1: Obsazení přepážky v knihovně během dne.

3. Knihovna – obsazení přepážky během dne

Otevřeno je od 8:00 do 14:00.

Nechť $S(x)$ udává počet knihovníků na přepážce v čase x .

Interpretujte data v grafu. Rozhodněte, zda je množina bodů grafem funkce. Pokud se jedná o graf funkce, určete (maximální) definiční obor a obor hodnot a další vlastnosti funkce.

4. Načrtněte graf funkce, pro kterou platí: $D_f = (-2; 2)$, je lichá, je klesající, není lineární.
5. Určete (maximální) definiční obor funkce.

a) $f_1 : y = \sqrt{5 - x^2}$, b) $f_2 : y = \frac{4x}{x^2 + 1}$, c) $f_3 : y = \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 9x}}$, d) $f_4 : y = \sqrt{\frac{x}{x + 1}}$.

6. Načrtněte graf funkce. Určete definiční obor, obor hodnot, průsečíky grafu funkce se souřadnicovými osami.

$$h : y = |x^2 + 2|x| - 3|$$

1 Řešení

1. Účinnost chlazení

a) Základní práce s předpisem

i) Definiční obor je

$$D(\eta) = [0, \infty).$$

Pomocí derivace bychom u oboru hodnot určili maximum, my ho budeme značit jen jako $\eta_{\max}$.

$$H(\eta) = [0, \eta_{\max}] \approx [0, 0.0569].$$

ii) Konkrétní hodnoty.

$$\eta(0) = 0, \quad \eta(1) = \frac{1}{20 + 3 + 0.2} = \frac{1}{23.2} \approx 0.04310,$$

$$\eta(4) = \frac{2}{20 + 12 + 3.2} = \frac{2}{35.2} \approx 0.05682, \quad \eta(9) = \frac{3}{20 + 27 + 16.2} = \frac{3}{63.2} \approx 0.04747.$$

b) Vlastnosti a chování funkce

i) Chování v okolí ∞ .

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \eta(v) = 0,$$

v okolí ∞ je klesající.

Interpretace: hnát rychlost ventilátoru do krajnosti se nevyplácí, „účinnost na jednotku příkonu“ jde k nule.

ii) Průsečíky s osami.

$$\eta(v) = 0 \iff \sqrt{v} = 0 \iff v = 0, \quad \eta(0) = 0.$$

Průsečík je jediný: $(0, 0)$.

2. Pružina s pojistkou (viz obrázek 2)

a) $D(T) = \mathbb{R}$, $H(T) = [-4; 4]$.

b) Lichá, $T(-\theta) = -T(\theta)$.

c) Striktně roustoucí na $(-4; 4)$.

d) Průsečík je jediný: $(0, 0)$.

e) Po dosažení krajní meze se zařízení zarazí (ochrana proti přetížení).

3. Nejedná se o graf funkce, v čase 11 hodin máme dvě funkční hodnoty.

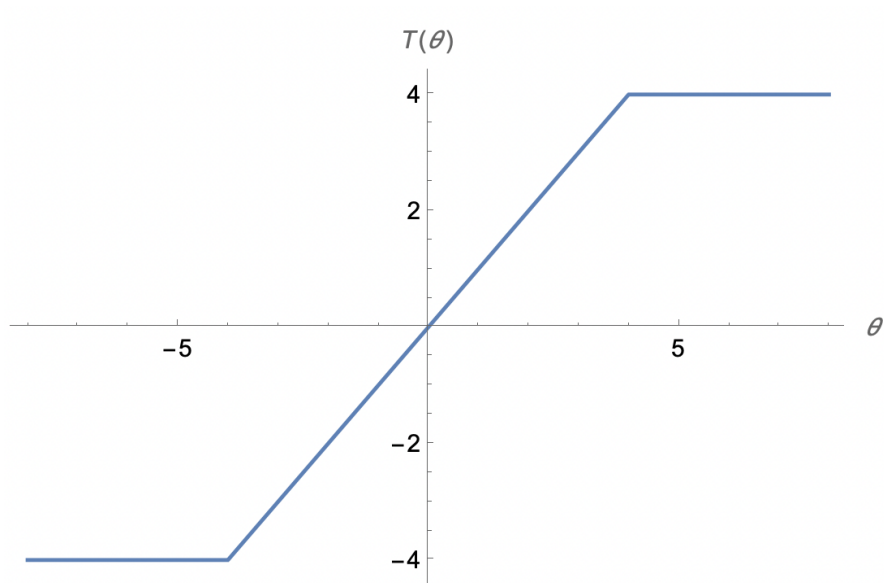
4. Určete (maximální) definiční obor funkce.

a) $D_{f_1} = [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$,

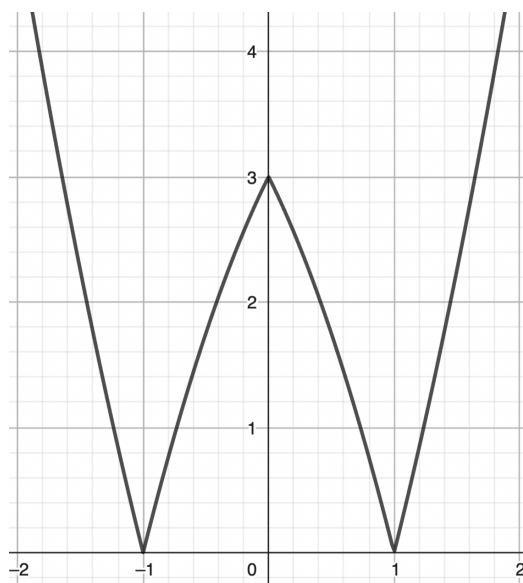
b) $D_{f_2} = \mathbb{R}$,

c) $D_{f_3} = (-\infty; 0) \cup (9; \infty)$,

d) $D_{f_4} = (-\infty; -1) \cup [0; \infty)$.

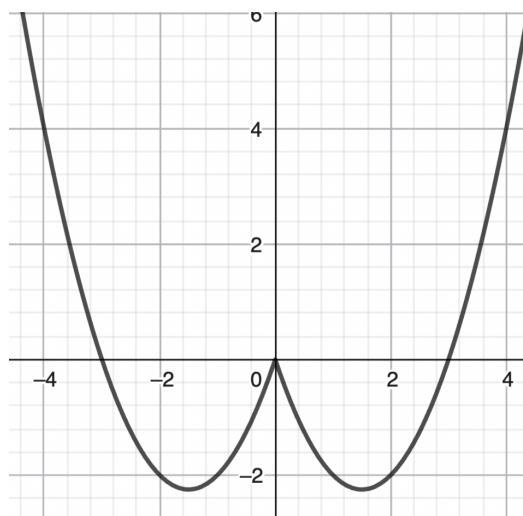


Obrázek 2: Graf funkce T .



Obrázek 3: Graf funkce h .

5. Z grafu zjistíme (viz obrázek 3), že $D_h = \mathbb{R}$, $H_h = [0; \infty)$, dále si všimneme i průsečíků s osami.
6. Úloha ze vzorového testu: $f : y = x^2 - 3|x|$, (viz obrázek 4).
 $D = \mathbb{R}$, $H = [-\frac{9}{4}; \infty)$, přičemž graf bychom opět načrtli pomocí průsečíků a vrcholů parabol.



Obrázek 4: Graf funkce f .