

## Exponenciální funkce a rovnice

### 1. Exponenciální růst bakterií

Uvažujme kulturu bakterií v ideálních podmínkách. Na začátku je v misce  $N(0) = 1$  bakterie. Každá bakterie se na konci *každé hodiny* rozdělí přesně na dvě. Označme  $N(h)$  počet bakterií po  $h$  hodinách, kde  $h \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

(a) Doplňte tabulku pro  $h = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ :

| $h$    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|---|---|---|---|---|---|
| $N(h)$ |   |   |   |   |   |   |

(b) Zakreslete do soustavy souřadnic  $Oxy$  uspořádané dvojice  $(h, N(h))$ , které jsme získali z tabulky.

(c) Odvoďte explicitní vzorec růstu bakterií a ověřte, že z něho skutečně získáme hodnoty z tabulky výše.

2. **Exponenciální funkce o základu  $a$**  je každá funkce  $f$  na množině  $\mathbb{R}$ , vyjádřená ve tvaru

$$f : y = a^x,$$

kde  $a$  je kladné číslo různé od 1.

(a) Načrtněte graf funkce  $h : y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ .

(b) Načrtněte graf funkce dle vzorce odvozeného z předchozí úlohy.

(c) Porovnejte vlastnosti funkcí (včetně  $D_f$  a  $H_f$ )  $h$  a grafu, který vznikl na základě vzorce z předchozí úlohy.

3. Řešte následující rovnice v  $\mathbb{R}$  (všimněme si rovněž pravidel pro počítání s exponenciálními výrazy o stejném základu).

(a)  $\frac{2^x \cdot 2^3}{2^{x-1}} = 16$

(b)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} \cdot 9 = 3$

(c)  $(5^{2x})^{\frac{1}{2}} = 25$

(d)  $\frac{4^{x+1}}{2^{2x-1}} = 16$

(e)  $2^x = e^5$

## Logaritmická funkce a rovnice

### 1. Kolik bitů potřebujeme?

Uvažujme, že chceme kódovat různé zprávy binárně (pomocí číslic 0/1). Délka kódu  $k$  (v bitech) určuje, kolik různých kódů lze vytvořit: pro  $k$  bitů je to  $2^k$  možností. Jak budeme postupovat opačným směrem? Potřebujeme-li rozeznat právě  $n$  různých zpráv, přičemž  $n$  je mocninou dvou, kolik přesně stačí bitů?

Označme  $B(n)$  minimální počet bitů potřebných k zakódování  $n$  různých zpráv (pro hodnoty  $n$  uvedené níže).

- (a) Doplňte tabulku pro  $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32$ :

| $n$    | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 |
|--------|---|---|---|---|----|----|
| $B(n)$ |   |   |   |   |    |    |

- (b) Zakreslete do soustavy souřadnic  $Oxy$  uspořádané dvojice  $(n, B(n))$  získané z tabulky. (Na ose  $x$  bude počet zpráv  $n$ , na ose  $y$  počet bitů  $B(n)$ .)  
 (c) Odvoďte explicitní vzorec pro  $B(n)$  a ověřte, že odpovídá hodnotám z tabulky.

2. **Logaritmická funkce o základu  $a$**  je každá funkce  $f$  inverzní k exponenciální funkci  $g : y = a^x$ , zapisujeme ji ve tvaru

$$f : y = \log_a x,$$

kde základ  $a$  je kladné číslo různé od 1 (tj.  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ).

- (a) Načrtněte grafy funkcí:  $b : y = \log_{\frac{1}{2}} x$ ,  $e : y = \frac{1}{\log_x 2}$ .  
 (b) Načrtněte graf funkce dle vzorce odvozeného z předchozí úlohy.  
 (c) Porovnejte vlastnosti funkcí (včetně  $D_f$  a  $H_f$ )  $b$  a grafu, který vznikl na základě vzorce z předchozí úlohy.
3. Řešte následující rovnice v  $\mathbb{R}$  (s ohledem na definiční obory logaritmů, všimněme si pravidel):

(a)  $\log_3 x + \log_3(x - 2) = 2$

(b)  $\log_5(x^2) - \log_5(4x) = 1$

(c)  $2 \log_2 x + \log_2\left(\frac{1}{8}\right) = 1$

(d)  $\frac{\ln x}{\ln 5} + \log_5 25 = 3$

4. Určete (maximální) definiční obor funkce.

a)  $k(x) = \log(x - 4)$ , d)  $r(x) = \frac{1}{e^{2x} - e^x - 2}$ ,

b)  $m(x) = \frac{1}{\log_3(x + 5) - 3}$ , e)  $u(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ ,

c)  $p(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(6x + 1)}$ , f)  $v(x) = \frac{1 + \ln x}{x\sqrt{1 - (\ln x)^2}}$

5. Rozhodněte, zda k funkcím existuje funkce inverzní. Jestliže ano, zakreslete funkci a inverzní funkci do téže soustavy souřadnic. Určete předpis, definiční obor a obor hodnot inverzní funkce.

a)  $f(x) = 2^{x-1} - 4$

b)  $g(x) = e^{x-2} + 3$ .