

Úlohy jsou převzaty z materiálu D. Webera, *Matematický proseminář I* (© 2025 David Weber).

Úloha 1.

Dokažte **sinovou větu**: v trojúhelníku ABC se stranami a, b, c a vnitřními úhly α, β, γ platí

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Nápověda: Spusťte výšku z vrcholu C a vyjádřete ji dvěma způsoby.

Úloha 2.

Dokažte přímo, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$4 \cos x + \cos 2x \geq -3.$$

Nápověda: Vyjádřete $\cos 2x$ pomocí $\cos x$ a upravte na čtverec.

Úloha 3. (2 způsoby)

Dokažte přímo a také matematickou indukcí: pro každé $n \in \mathbb{N}$ je číslo $n^3 + 5n$ dělitelné třemi.

Nápověda: Přímo: $n^3 + 5n = (n^3 - n) + 6n$. Rozložte $n^3 - n$ na součin.

Úloha 4.

Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je číslo $10^{2n+1} + 1$ dělitelné číslem 11.

Nápověda: Pozor na začátek: nejmenší n je zde 0. Číslo 10^{2n+3} zapište pomocí 10^{2n+1} .

Úloha 5.

Dokažte **Bernoulliovu nerovnost**: pro všechna $x \in \langle -1, \infty \rangle$ a všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Nápověda: Kde se v indukčním kroku použije předpoklad $x \geq -1$? Co by se stalo pro $x < -1$?

Úloha 6.

Dokažte **Moivreovu větu**: pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx.$$

Nápověda: Použijte součtové vzorce pro $\cos(x+y)$ a $\sin(x+y)$ a porovnejte reálné a imaginární části.

Úloha 7.

Uvažujme čtvercovou šachovnici o straně 2^n polí ($n \in \mathbb{N}$). Jedno libovolné pole začerníme. Dokažte, že zbylá pole lze beze zbytku pokrýt dlaždicemi ve tvaru písmene L složenými ze tří čtverečků (*triminy*) tak, aby se nepřekrývaly.

Nápověda: Rozdělte šachovnici o straně 2^{n+1} na čtyři šachovnice o straně 2^n . Kam umístíte první trimino, aby měla každá čtvrtina zase jedno „chybějící“ pole?