

1 Úlohy

1. Dokažte přímým důkazem větu:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ \text{ platí } \left(\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \right).$$

2. Nepřímým důkazem dokažte větu:

$$a \in \mathbb{N}, \text{ pokud } a^2 \text{ je dělitelné třemi, pak i } a \text{ je dělitelné třemi.}$$

3. Dokažte sporem, že číslo $\sqrt{3}$ je iracionální.

Bonus: Jak bychom postupovali u $\sqrt{2}$?

4. Dokažte, že

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ platí } 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

5. Dokažte Pythagorovu větu pomocí obrázku.

2 Řešení

1. Dokažte přímým důkazem:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Řešení: Vyjdeme od zadaného výroku a pokusíme se z něj pomocí ekvivalentních úprav odvodit jiné tvrzení, o němž víme, že je pravdivé. Samotný důkaz by pak postupoval v opačném pořadí. Protože a i b jsou kladná čísla, bude umocnění nerovnosti ekvivalentní úpravou. Dospějeme tak k nerovnosti $(a+b)^2 \geq 4ab$. Umocněním výrazu na levé straně a následnou úpravou dojdeme k nerovnosti $(a-b)^2 \geq 0$, což jistě platí pro všechna $a, b \in \mathbb{R}^+$.

2. Dokažte nepřímým důkazem:

$$a \in \mathbb{N} \text{ a } a^2 \text{ je dělitelné třemi} \Rightarrow a \text{ je dělitelné třemi.}$$

Řešení: Dokážeme obměněnou implikaci ($\neg A \Rightarrow \neg B$): Pokud přirozené číslo a není dělitelné třemi, pak ani a^2 není dělitelné třemi.

Přirozené číslo a , které není dělitelné třemi, lze zapsat jako $a = 3k + 1$ nebo $a = 3k + 2$, kde $k \in \mathbb{N}$. Oba výrazy umocníme na druhou:

$$(3k+1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1, \quad (3k+2)^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1.$$

V obou případech dostáváme při dělení třemi zbytek 1, tedy a^2 není dělitelné třemi.

3. Dokažte sporem:

$\sqrt{3}$ je iracionální.

Řešení: Předpokládejme, že $\sqrt{3}$ je racionální. Pak lze psát

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad q \neq 0, \quad NSD(p, q) = 1.$$

Umocníme a upravíme:

$$3q^2 = p^2.$$

Vidíme, že číslo 3 dělí p^2 , tedy dělí i p (dle předchozí úlohy). Položme $p = 3k$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Potom platí $3q^2 = (3k)^2 = 9k^2$, tedy $q^2 = 3k^2$. Z toho plyne, že 3 dělí q^2 a tedy i q , což je ve sporu s předpokladem, že p a q jsou nesoudělná. Tedy $\sqrt{3}$ je iracionální.

Obdobně postupujeme i u $\sqrt{2}$.

4. Dokažte matematickou indukcí:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Řešení:

(a) Pro $n = 1$ dostáváme $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$, což platí.

(b) Předpokládejme, že pro n platí

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Chceme dokázat, že platí i pro $n + 1$:

$$\underline{1 + 2 + \dots + n} + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}.$$

Dosadíme indukční předpoklad:

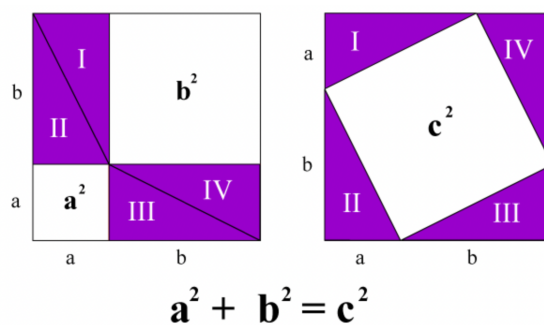
$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

$$\frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Implikace $V(n) \Rightarrow V(n+1)$ je pravdivá, platí tedy i původní dokazované tvrzení.

5. Dokažte Pythagorovu větu pomocí obrázku - zdroj: Pythagoras.



Obrázek 1: Důkaz obrázkem.

Pro procvičení i pro zvědavé čtenáře:

- Mini série o důkazech od Marka Valáška: Mini série důkazy.
- Příběh malého Gausse na straně 46 (v pdf 28): Dějiny matematiky.
- Součet n členů aritmetické posloupnosti: Řešené úlohy.