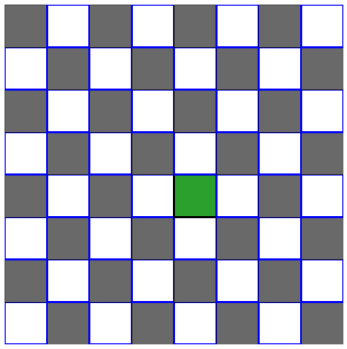
Relace

1 Šachovnice na cestách

Definici pojmů *uspořádaná dvojice*, *kartézský součin* či *relace* nalezneme níže, avšak jak bychom si je mohli intuitivně představit? Ačkoliv pravidla šachové partie nezůstanou v paměti každého z nás, tak si pod pojmem *šachovnice* určitě dokážeme představit černobílou čtverečkovou plochu.
Pojďme se nyní proletět do Japonska za naším kamarádem Takumim. Takumi rád hraje shogi a go, šachy ovšem nezná. Sbalíme si proto do kufru šachovnici, abychom mu ji mohli ukázat. Po příletu Takumi rozloží hrací desku shogi, vedle položí také hrací desku go, mezitímco my rozložíme šachovnici. Na první pohled se desky liší nejen v počtu políček, ale především v **popisu polí**.
Chceme-li na naší šachovnici znát polohu figurky, potřebujeme znát konkrétní políčko, kde se nachází. Například bílá levá věž se na začátku hry nachází na pozici $(a, 1)$. Jedno políčko na šachovnici, resp. jeho pozice, je vlastně *uspořádaná dvojice*. Abychom tedy mohli hrát šachy, nestačí mít jen černobílé čtverečky, potřebujeme je *označit*. Pro jejich označení používáme písmena $a, b, c, \ldots, h$ a čísla $1, 2, 3 \ldots, 8$, což lze přepsat do řeči množin jako $A = a, b, c, \ldots, h$ a $B = 1, 2, 3 \ldots, 8$.
Neboť *kartézský součin* je množina všech možných uspořádaných dvojic prvků, kde první prvek pochází z první množiny a druhý z druhé, nejedná se v našem příběhu o nic jiného než o celou hrací plochu šachovnice.
Jak si můžeme na šachovnici představit relaci?
To už je vlastně jednoduché. *Relace* je podmnožinou kartézského součinu, tedy se jedná například o:

- bílá pole,
- černá pole,
- pole, která jsou navštívena koněm při jednom tahu,
- pole, která jsou navštívena střelcem při jednom tahu,
- rohová pole, atd.

Může to ovšem být i celá šachovnice, viz obrázek 1.



Obrázek 1: Uspořádaná dvojice vyznačena v šachovnici zeleně jako pozice jednoho políčka, kartézský součin v podobě celé hrací plochy šachovnice, relací rozumíme například pouze bílá pole označena modrým rámováním.

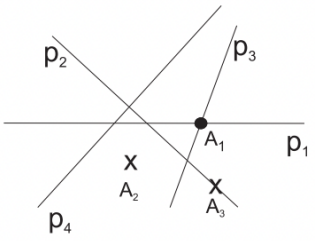
2 Zadání

1. **Uspořádaná dvojice**. Uspořádanou dvojicí prvků nazýváme množinu (a, b) definovanou vztahem

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Zápis $\{x, y\}$ označuje množinu se dvěma prvky, zatímco (x, y) označuje *uspořádanou dvojici*.

Příklad. Mějme $H = \{A_1, A_2, A_3\}$ (body) a $K = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ (přímky). Vypište všechny uspořádané dvojice (X, y) tak, aby platilo, že X je některý z bodů množiny H, y je některá z přímek množiny K a $X \in y$.



Obrázek 2: Body a přímky.

2. **Kartézský součin.** Pro množiny A, B je *kartézský součin* $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$.

   (a) Jsou dány množiny $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{3; 4\}$, $C = \varnothing$, $D = \{-1; 0\}$. Vypište všechny prvky kartézských součinů:

   $$\text{i) } A \times B, \quad \text{ii) } B \times A, \quad \text{iii) } B \times D, \quad \text{iv) } A \times C.$$

   (b) Je kartézský součin *komutativní*?

(c) Znázorněte kartézským a šachovnicovým grafem $A \times B$, je-li $A = \{a, b, c\}$, $B = \{o, p\}$. Určete $|A \times B|$. Znázorněte uzlovým grafem $A \times B$, je-li $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$.

3. **Relace.** *Binární relací* R z množiny A do množiny B rozumíme podmnožinu $A \times B$ (tj. $R \subseteq A \times B$). Jestliže $(a, b) \in R$, píšeme také aRb. Je-li $A = B$, říkáme, že R je *relace na* A.

   Příklad. Pro množiny $A = \{1; 2; 4; 8\}$, $B = \{5; 6; 11\}$ zapište výčtem následující množinu:

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid a \leq 3 \Rightarrow b = 2a + 3\}.$$

4. **Inverzní relace.** Binární relace $R^{-1} \subseteq B \times A$ se nazývá *inverzní k relaci* R, jestliže platí

$$bR^{-1}a \iff aRb.$$

   (a) Je dána relace R na množině $A = \{1; 2; 3; 4\}$. Znázorněte tuto relaci pomocí šachovnicového grafu a zapište výčtem R^{-1} a doplňkovou relaci R' do $A \times A$:

$$\text{i) } R = \{(a, b) \in A \times A \mid a < b\},$$
$$\text{ii) } R = \{(a, b) \in A \times A \mid a^2 = b\}.$$

   (b) Nechť je dána množina $A = \{x, y, z\}$ a v ní je dána relace výčtem všech uspořádaných dvojic $R = \{(x, y), (x, x), (y, x), (z, z)\}$. Určete výčtem prvků *doplňkovou relaci* R' do $A \times A$ a *inverzi* R^{-1}.

5. **Složení relací.** Složená relace $S \circ R$ je relací z množiny A do množiny C taková, že pro každé $a \in A$ a $c \in C$ platí

$$a(S \circ R)c \iff (\exists b \in B : aRb \wedge bSc).$$

   Příklady.

   (a) Mějme množiny $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{x, y, z\}$ a relace $R_1 \subseteq A \times B$, $R_2 \subseteq B \times C$, $R_1 = \{(1; a), (1; b), (2; a), (3; b)\}$, $R_2 = \{(a; x), (a; y), (b; x), (b; z)\}$.
   Vypište složení relací $R_2 \circ R_1$.

   (b) Na množině $M = \{1; 2; 3; 4\}$ jsou dány relace

$$R = \{(1; 2), (2; 2), (1; 3), (3; 4)\}, \qquad S = \{(1; 1), (3; 2), (4; 1)\}.$$

   Zapište výčtem:

$$\text{i) } R \circ R, \quad \text{ii) } S \circ S, \quad \text{iii) } R \circ S, \quad \text{iv) } S \circ R.$$

6. **Vlastnosti relací.** Nechť R je relace na A. Řekneme, že R je

   - reflexivní, jestliže $\forall a \in A : \ aRa$,
   - symetrická, jestliže $\forall a, b \in A : \ aRb \Rightarrow bRa$,
   - slabě antisymetrická, jestliže $\forall a, b \in A : \ aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$,
   - silně antisymetrická, jestliže $\forall a, b \in A : \ aRb \Rightarrow \neg(bRa)$,
   - tranzitivní, jestliže $\forall a, b, c \in A : \ aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$.

Mějme množinu $M = \{x, y\}$. Jak bys pomocí uzlového grafu zakreslil vlastnosti relací?

   Příklad.

(a) Určete vlastnosti daných relací nejprve na množině $\mathbb{N}_0$ a poté na množině $\mathbb{R}$. V obou případech relace vhodně graficky znázorněte:

i. $(x, y) \in R_1 \iff x = -y$,
ii. $(x, y) \in R_2 \iff x > y$,
iii. $(x, y) \in R_3 \iff x \cdot y < 0$.

7. **Relace ekvivalence.** Relace $\sim$ na množině A je *relací ekvivalence*, pokud je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Máme-li relaci ekvivalence $\sim$ na množině A a libovolný prvek $a \in A$, pak **třída ekvivalence** určená prvkem a je množina

$$[a]_\sim := \{x \in A \mid a \sim x\}.$$

Příklad. Mějme relaci D a číslo $m \in \mathbb{N}$ na množině $\mathbb{Z}$ zadanou jako

$$D = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a, b \text{ mají stejný zbytek po celočíselném dělení } m\}.$$

Je D relace ekvivalence? V kladném případě popište jednotlivé třídy ekvivalence.

3 Řešení

1. Hledáme ty body, které leží na přímkách. Tvoříme uspořádané dvojice:

$$(A_1, p_1), (A_1, p_3), (A_3, p_2).$$

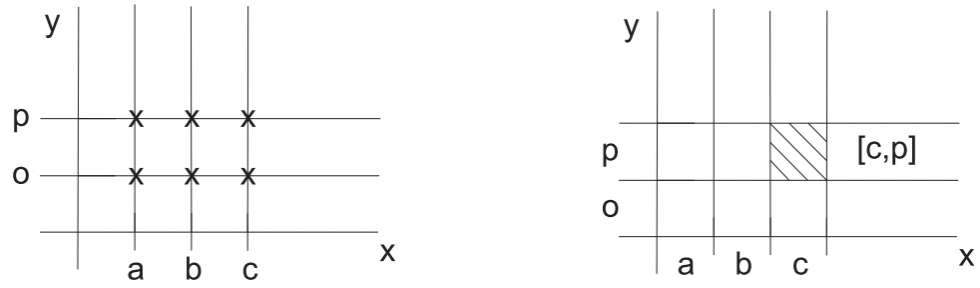
2. a) Kartézským součinem dvou množin M_1, M_2 je množina uspořádaných dvojic $(m_1; m_2)$, kde $m_1 \in M_1$ a $m_2 \in M_2$.

i) $\{(1;3), (1;4), (2;3), (2;4), (3;3), (3;4)\}$
ii) $\{(3;1), (3;2), (3;3), (4;1), (4;2), (4;3)\}$
iii) $\{(3;-1), (3;0), (4;-1), (4;0)\}$
iv) $\{\}$

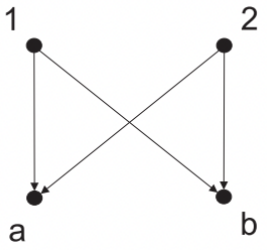
b) Podíváme-li se na předchozí úlohu a porovnáme-li *i*) a *ii*), zpozorujeme, že komutativní není (pouze ve výjimečných případech).

c) $|A \times B| = 12$. Dále načrtneme grafy[1], viz obrázek 3 a obrázek 4.

[1] Obrázky převzaty z Relace, uspořádání a ekvivalence - sbírka řešených příkladů.



Obrázek 3: Kartézský a šachovnicový graf $A \times B$.



Obrázek 4: Uzlový graf.

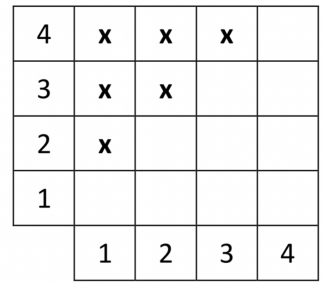
3. Pro získání řešení je vhodné napsat si tabulku pravdivostních hodnot implikace, pak získáme:

$$R = \{(1;5), (4;5), (4;6), (4;11), (8;5), (8;6), (8;11)\}.$$

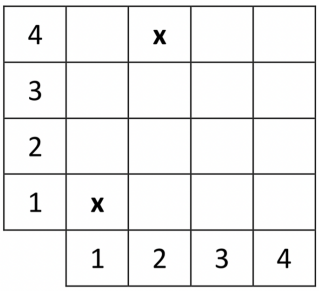
4. Relací rozumíme podmnožinu kartézského součinu, tj. množinu těch uspořádaných dvojic (obecně n-tic pro součin n množin), které splňují stanovené podmínky.

   a) i) V relaci R leží právě ty dvojice $(a;b)$ z kartézského součinu $A \times A$, které splňují podmínku $a < b$.
   $R = \{(1;2), (1;3), (1;4), (2;3), (2;4), (3;4)\}$, obr. 5,
   $R^{-1} = \{(2;1), (3;1), (4;1), (3;2), (4;2), (4;3)\}$,
   $R' = \{(1;1), (2;1), (2;2), (3;1), (3;2), (3;3), (4;1), (4;2), (4;3), (4;4)\}$.

   ii) V relaci R leží právě ty dvojice $(a;b)$ z kartézského součinu $A \times A$, které splňují podmínku $a^2 = b$.
   $R = \{(1;1), (2;4)\}$, obr. 6,
   $R^{-1} = \{(1;1), (4;2)\}$,
   $R' = \{(1;2), (1;3), (1;4), (2;1), (2;2), (2;3), (3;1), (3;2), (3;3), (3;4), (4;1), (4;2), (4;3), (4;4)\}$.



Obrázek 5: Úloha *i*).



Obrázek 6: Úloha *ii*).

b) Důležité je určit $A \times A$.

$$A \times A = \{(x,x),(x,y),(x,z),(y,x),(y,y),(y,z),(z,x),(z,y),(z,z)\}.$$

Z definice víme, že všechny uspořádané dvojice, které nepatří do R, tvoří relaci doplňkovou R'.

$$R' = \{(x,z),(y,y),(y,z),(z,x),(z,y)\}.$$

Pro inverzní relaci platí:

$$R^{-1} = \{(y,x),(x,x),(x,y),(z,z)\}.$$

5. a) Složením relací získáme

$$R_2 \circ R_1 = \{(1;x),(1;y),(1;z),(2;x),(2;y),(3;x),(3;z)\}.$$

b) Připomeňme, že prvek $(a;c)$ náleží relaci $R \circ S$ právě tehdy, existuje-li prvek b takový, že $(a;b) \in S$ a zároveň $(b;c) \in R$.

i) $R \circ R = \{(1;2),(2;2),(1;4)\}$

ii) $S \circ S = \{(4;1),(1;1)\}$

iii) $R \circ S = \{(1;2),(1;3),(3;2),(4;2),(4;3)\}$

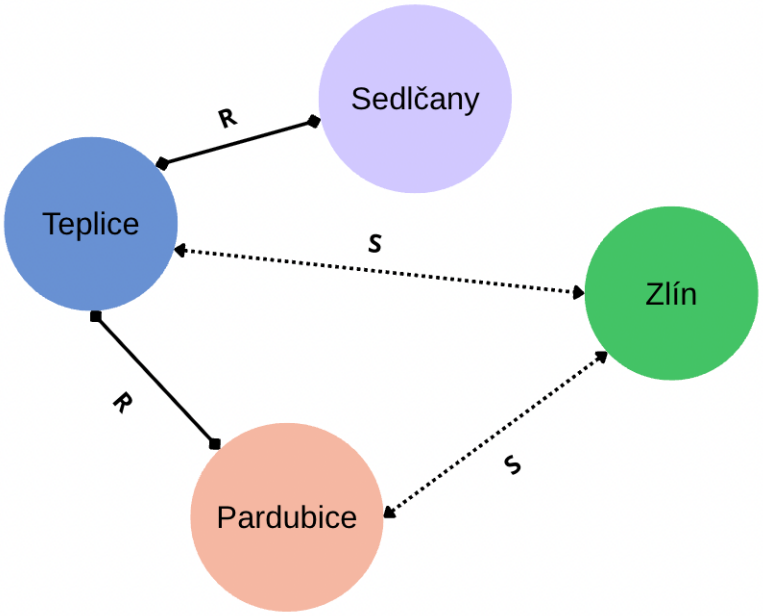
iv) $S \circ R = \{(1;2),(3;1)\}$

K čemu mi to bude? (Relační databáze)
Na obrázku č. 7 (níže) vyznačíme přímé autobusové spoje mezi městy plnou čarou a tuto relaci označíme R. Přímé vlakové spoje vyznačíme přerušovanou čarou a danou relaci označíme S. Chceme-li

- z Pardubic do Sedlčan, musíme jednou přestoupit v Teplicích, složením relací bychom dostali $R \circ R$,
- ze Zlína do Sedlčan, musíme nejdříve vlakem a následně v Teplicích přestoupit na autobus, tj. $R \circ S$.

Na podobném principu relační databáze funguje třeba idos.cz.

Poznámka: Města v příkladu byla navržena některými kolegy v průběhu cvičení, tedy jakákoli podobnost se skutečnými spoji v reálném životě je čistě náhodná.



Obrázek 7: Relace mezi městy.

6. Některé vlastnosti relací můžeme zakreslit pomocí uzlového grafu, viz obr. 8.

   a) Obrázky k jednotlivým případům nalezneme níže, viz obr. 9.

      i) Na množině $\mathbb{N}_0$ náleží relaci pouze dvojice $(0;0)$. Relace je symetrická, slabě antisymetrická a tranzitivní.
      Na množině $\mathbb{R}$ náleží relaci dvojice $(0;0)$ a také každá dvojice navzájem opačných čísel. Relace je symetrická.

ii) Na množině $\mathbb{N}_0$ i na množině $\mathbb{R}$ je relace antireflexivní, silně i slabě antisymetrická a tranzitivní.

iii) Na množině $\mathbb{N}_0$ je relací prázdná množina. Relace je antireflexivní, symetrická, silně i slabě antisymetrická a tranzitivní. (Prázdná množina je malinko záludný případ. Trik spočívá v tom, že nemáme žádné prvky, které by nám vlastnost porušily, proto máme automaticky splněno.)
Na množině $\mathbb{R}$ je relace antireflexivní a symetrická.

Diskuze během cvičení ohledně slabé antisymetrie.
Na cvičení jsme u příkladu 6 a) *ii*) narazili na slabou antisymetrii a otázku:

– Jestliže je relace silně antisymetrická, pak je vždy i slabě antisymetrická?
Odpověď zní ano.

Pojďme si odpověď více odůvodnit (zdůvodnění je čistě pro zvídavé čtenáře, jedná se o látku navíc).
Silná antisymetrie $\implies$ slabá antisymetrie (pozor, opačná implikace platit nemusí).
Silná antisymetrie má tři ekvivalentní zápisy.

$$\forall a,b: \quad \underbrace{aRb \Rightarrow \neg(bRa)}_{\text{definice}} \equiv \underbrace{\neg(aRb) \vee \neg(bRa)}_{\text{implikace jako disjunkce}} \equiv \neg\big(aRb \wedge bRa\big)$$

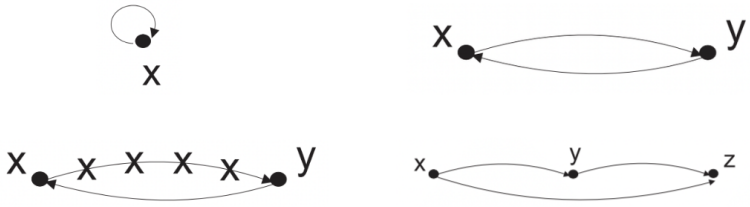
Podíváme se konkrétně na relaci $>$ z našeho příkladu a rozepíšeme silnou antisymetrii jako ji máme uvedenou výše:

$$\forall a,b: \quad \neg\big(a > b \ \wedge \ b > a\big).$$

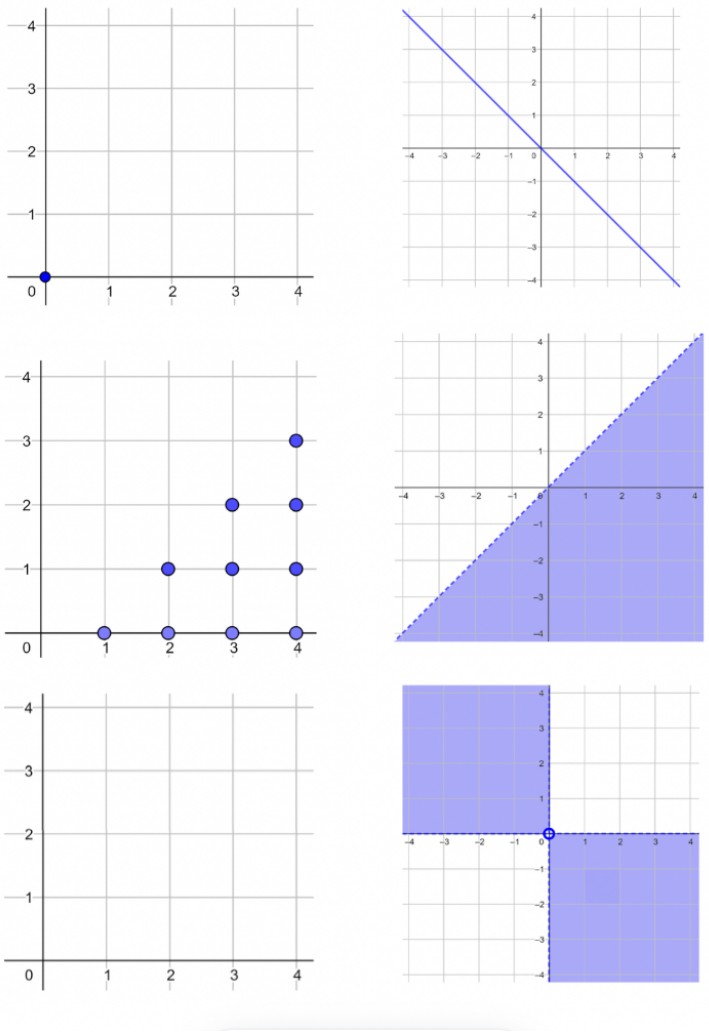
Pro slabou antisymetrie platí:

$$\forall a,b: \quad (a > b \wedge b > a) \Rightarrow a = b.$$

Ze silné antisymetrie vyplývá, že předpoklad (antecedent) implikace v definici slabé antisymetrie není nikdy splněn (slabá antisymetrie tedy triviálně platí z tabulky pravdivostních hodnot implikace ($0|0 \implies 1, 0|1 \implies 1$)).



Obrázek 8: V prvním řádku je pomocí uzlového grafu znázorněna reflexivita (vlevo), symetrie (vpravo), v druhém řádku antisymetrie (vlevo) a tranzitivita (vpravo).



Obrázek 9: Grafy k úloze i), ii), iii), $\mathbb{N}_0$ (vlevo), $\mathbb{R}$ (vpravo).

7. Co znamená *kongruentní modulo m*?
Nechť $m \in \mathbb{N}$. Čísla $a, b \in \mathbb{Z}$ jsou *kongruentní modulo* m, pokud

$$m \mid (b - a).$$

Značíme $a \equiv b \pmod{m}$.

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

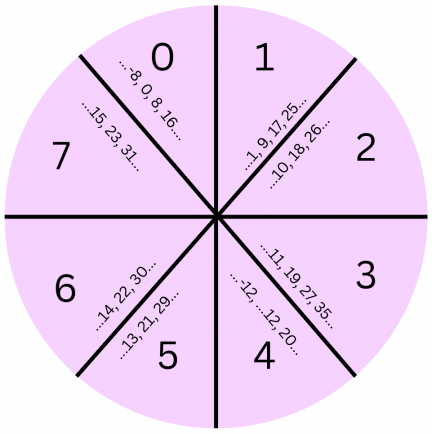
- $a \equiv b \pmod{m}$,
- a, b mají stejný zbytek po dělení číslem m,
- $b = a + km$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

Relace kongruence modulo m je relace ekvivalence na množině celých čísel (tj. reflexivní, symetrická a tranzitivní relace).

Relace kongruence modulo m rozloží množinu celých čísel na třídy navzájem ekvivalentních prvků, tzv. *zbytkové třídy modulo m*. Množinu všech zbytkových tříd modulo m značíme $\mathbb{Z}_m$:

$$\mathbb{Z}_m = \{[0]_m, [1]_m, \ldots, [m-1]_m\}, \qquad [a]_m = \{\, a + km \mid k \in \mathbb{Z} \,\}.$$

Například vezmeme třídy, z nichž každá obsahuje všechna celá čísla, která mají při dělení 8 stejný zbytek, tj. číslo z množiny $\{0, 1, 2, 3 \ldots, 7\}$, viz obrázek 10.



Obrázek 10: Každé celé číslo m spadne do některé z výsečí. Přičtení 8 nás vrací do stejné výseče, přičtení 1 nás posune o jednu výseč dál (po směru hodinových ručiček). Celý koláč reprezentuje $\mathbb{Z}$.